ACReS

Habilidades Académicas y de Preparación para la Carrera

Repaso de Matemáticas Elementales

Unidad

2

National PASS Center

2013

Lección

1

El Uso del Valor Posicional
Números Enteros y el Valor Absoluto

Vocabulario:

- √ **valor posicional**
- √ **númerous enteros**
- √ **recta numérica**
- √ **valor absoluto**

En ocasiones, las matemáticas emplean números muy grandes. Existe un sistema para escribir y leer estos números. El **valor posicional** se emplea para leer números grandes ya que indica cuánto vale un dígito según su posición en el número.

✓ El valor de un dígito depende del lugar en que se encuentra en el número. Su posición se denomina el **valor posicional**.

Ejemplo: En el número 357, el 3 está en el lugar de las centenas, el 5 está en el lugar de las decenas y el 7 está en el lugar de las unidades. Este número se escribe y se dice como "trescientos cincuenta y siete". Pero, ¿qué hay de los números realmente grandes?

En general, los números muy grandes se agrupan en conjuntos de tres dígitos. Cada uno de estos conjuntos de tres dígitos está separado por una coma. Este método hace los números más fáciles de ver. También ayuda a escribir el número y pronunciarlo. Observa el número que sigue. Nota donde se colocaron las comas.

Ejemplo: 23**,**463**,**245**,**978,031

Empieza por la derecha contando de tres en tres. El primer grupo de tres dígitos son las centenas. El segundo grupo son los miles. El tercer grupo de tres son los millones. El cuarto grupo son los billones. ¡El último grupo son los trillones!

✓ Cada grupo de tres dígitos se llama **clase**. Las comas separan las clases unas de otras.

El valor de un solo dígito depende de su posición en un número. Donde se encuentre un dígito en una clase también le da valor. Observa la tabla que sigue. Se ha escrito en ella un número grande por clases.

Clase de los Trillones			Clase de los Billones			Clase de los Millones			Clase de los Miles			Clase de las Unidades		
0	2	3	4	6	3	2	4	5	9	7	8	0	3	1
Cien Trillones	Diez Trillones	Trillones	Cien Billones	Diez Billones	Billones	Cien Millones	Diez Millones	Millones	Cien Miles	Diez Miles	Miles	Cientos	Dieces	Unos

Para definir las clases, siempre empieza por el dígito más lejano a la derecha. Después de definirlas, podrás escribir el número con palabras. Siempre escribe un número grande empezando desde el dígito más lejano a la izquierda.

En palabras, el número 23,463,245,978,031 se escribe como "veintitrés trillones, cuatrocientos sesenta y tres billones, doscientos cuarenta y cinco millones, novecientos setenta y ocho mil, treinta y uno". Nunca uses la palabra "y" cuando escribas o digas un número en palabras.

Ésta es la regla a seguir para escribir y decir números grandes.

Regla

Para escribir un número:

1. Inicia desde el extremo derecho y pon una coma entre cada tres dígitos.
2. Comienza por la derecha de nuevo. Cuenta el primer grupo como el período de las unidades. El segundo grupo son los miles. El tercero son los millones. Sigue así hasta llegar al grupo final de la izquierda.
3. Comienza por el extremo izquierdo. Escribe los números en palabras. Utiliza términos de la clase de las unidades.
4. Escribe el valor de la clase (trillones, billones, millones, etc.) seguido de una coma.
5. Repítelo hasta escribir los valores de la clase de las unidades.

¡Inténtalo!

1. Escribe los siguientes números con palabras y dilos en voz alta:

   a. 1,345

   b. 456,210

   c. 1,948,111,985

   d. 1,000,043,000,005

2. La población del mundo es de seis billones, ochocientos doce millones, treinta y cuatro mil, trescientos noventa y tres. Escribe esto con números.

____

3. En el número 836,204,124,385,685

a. ¿Cuál es el valor posicional del cero? ____________________________

b. ¿Cuál es el valor de la clase de los dígitos 124? ____________________

4. En cada número siguiente, circula o subraya el dígito en el valor del lugar escrito a la derecha.

a.	1,234,567	diez miles
b.	947,183,208,264,900	cien millones
c.	608,574	decenas
d.	917,333,273,194,732	trillones
e.	1,532	unidades
f.	622,948	miles

5. Escribe con palabras los siguientes números.

a. 1,009 ____

____

b. 13,076 ____

____

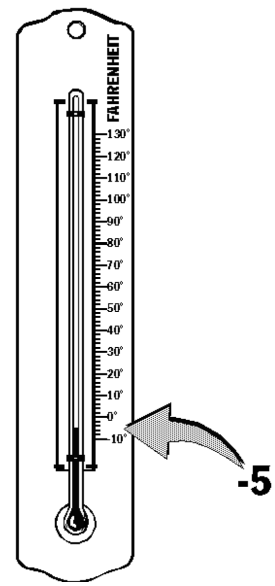
c. 100,000,000,000,000 ______________________________________

____

d. 847,256,958,123,732 ______________________________________

____

Los Números Enteros y el Valor Absoluto



Despiertas una mañana y miras por la ventana. ¡Está nevando! Lees el termómetro. La temperatura es de –5 grados. Ves más de cerca el termómetro. Notas que el número es bajo cero.

Cuando contamos, normalmente utilizamos **números enteros**.

✓ Los **números enteros** son los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,…

Puedes contar tus cuatro lápices. Puedes ver que no quedan huevos en tu refrigerador. El menor número entero es cero. No hay un número entero más grande. Siempre podrás agregar otro número más arriba del más alto en que puedas pensar.

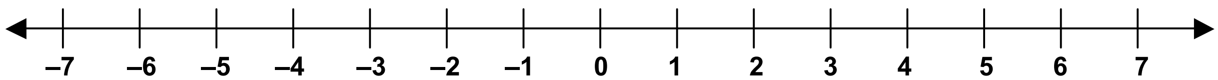
A veces necesitas contar cosas que son menores a cero. Por ejemplo, Tiger Woods tuvo puntuación de –1 en el Torneo de Golf de la PGA en 2008. La temperatura en la historia de líneas arriba era de –5 grados. Los números menores de cero se denominan **números negativos**.

✓ Los **números negativos** son todos los números que son <u>menores a</u> cero…
–1, –2, –3, –4, –5, –6,…

El grupo de todos los números enteros positivos y negativos juntos, más el cero, se denomina el conjunto de números enteros.

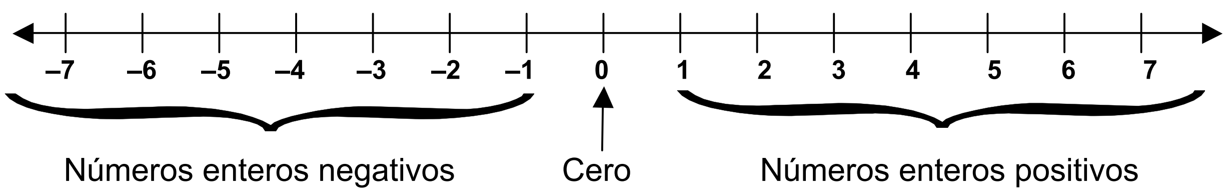
El cero no es ni positivo ni negativo. ¡Es solo cero! El ecuador separa los hemisferios norte y sur del planeta. El cero funciona de la misma forma. Separa los números enteros positivos y negativos.

Una forma de entender los números enteros es verlos en una **recta numérica**.

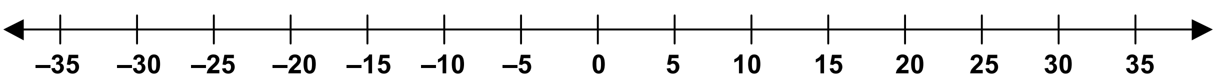


La **recta numérica** es una forma de mostrar todos y cada uno de los números. Nota que hay espacios entre los números enteros. Estos están ahí porque existen números entre los números enteros. Hablaremos de estos otros números más adelante. Por ahora, veamos solo los números enteros.

Los grupos de números que componen los números enteros se muestran con llaves en la recta numérica siguiente.

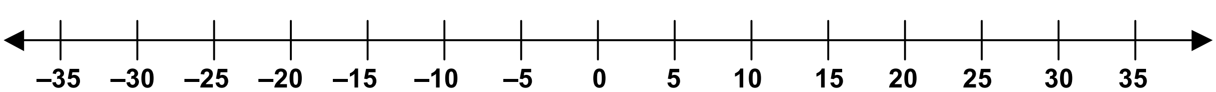


Las rectas numéricas no siempre muestran todos los números enteros. Por ejemplo, fíjate en esta recta numérica.

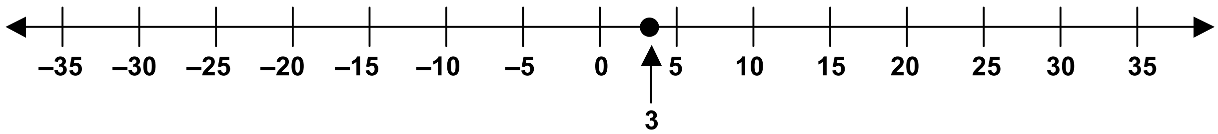


En ésta, la recta numérica va incrementándose de 5 en 5. Siempre y cuando siempre incrementes la misma cantidad, puedes graduar tu recta numérica como quieras. No todo número entero se etiqueta, pero todavía siguen en la recta. Recuerda: Las rectas numéricas muestran cada número, aun si no están etiquetados.

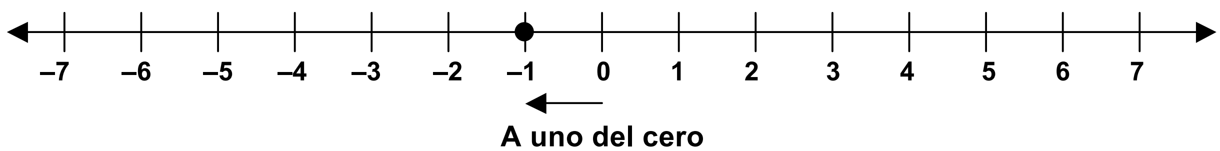
Ejemplo: Indica donde se encuentra el 3 en la recta numérica que se proporciona.



Solución Sabemos que el 3 estará entre el 0 y el 5. También sabemos que 3 está a 3 números enteros de distancia del cero, y a solo 2 números enteros de 5. Así, 3 está más cerca del 5 que del 0. Debido a esto, pondremos un punto sobre la escala de números que esté ligeramente más cerca del 5 que del cero.



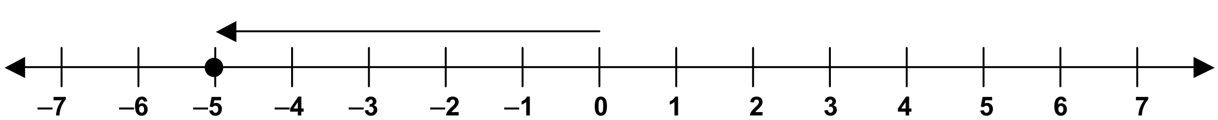
Nota que el cero está justo en medio de la recta numérica. Separa los números enteros negativos de los positivos. El cero es un número importante en matemáticas. Se usa para compararlo contra otros números. Por ejemplo, la puntuación de 1 lograda por Tiger Woods está a 1 del cero. Puedes verlo en la recta.



Primero, pon un punto sobre la línea donde está el número real. Luego, cuenta qué tan lejos está del cero. Con esto encuentras la <u>distancia</u> desde cero. Si el número es positivo, cuenta hacia la derecha. Si el número es negativo, cuenta hacia la izquierda. Como puedes ver, **–**1 está a un lugar del cero.

Ejemplo: Muestra –*5* sobre la recta numérica, y luego determina su distancia desde el cero.

Solución Sobre la recta numérica, coloca un punto en –5 para mostrar donde está.



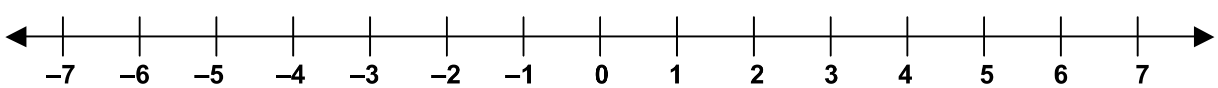
Luego, utilizando una flecha, cuenta cuántos números enteros hay desde el cero. Está a 5 del cero. Para mostrar esto decimos que $|-5| = 5$.

✓ La <u>distancia</u> entre un número y el cero es su **valor absoluto**. El valor absoluto de un número se nota poniendo líneas verticales limitando el número a derecha e izquierda. Así, para mostrar el valor absoluto de -12, ponemos $|-12| = 12$. El valor absoluto de un número es siempre positivo.

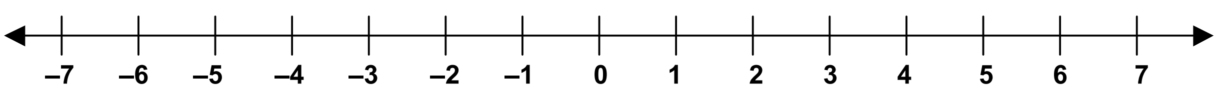
¡Inténtalo!

6. Desarrolla lo siguiente sobre la recta numérica. Encuentra la distancia de cada número al cero. Luego, expresa en términos matemáticos el valor absoluto del número.

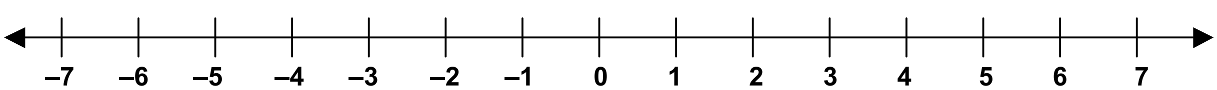
a. –2



b. 4



c. 0



La distancia es siempre positiva. El valor absoluto es siempre positivo. El valor absoluto de un número positivo es ese número. El valor absoluto de un número negativo es ese número sin el signo negativo.

Ejemplo: $|-3| = 3$ y $|37| = 37$

Regla

Para encontrar el valor absoluto de un número:

1. Si el número es positivo, el valor absoluto es ese número.
2. Si el número es negativo, el valor absoluto es ese número sin el signo negativo.

¡Inténtalo!

7. Encuentra el valor absoluto de las siguientes expresiones.

a. $|13|$ **b.** $|-7|$ **c.** $|-400|$ **d.** $|10|$

8. Sin utilizar matemáticas, ¿es $|-(5829 - 4928)|$ positivo o negativo? ¿Cómo sabes?

NOTAS o preguntas que quieras hacer:

Fin de la Lección 1

Lección 2

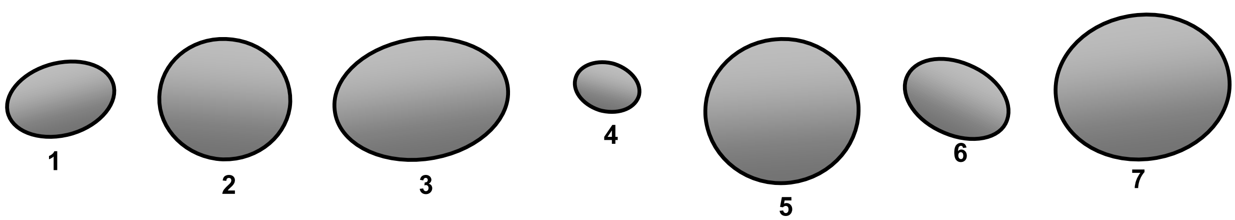
Adición y Sustracción Con Números Enteros

Vocabulario:

- √ **adición**
- √ **sustracción**

La ***adición*** es el proceso empleado para contar el número de objetos en dos o más grupos. Imagina que caminas por una playa, recogiendo piedras. Recoges unas piedras oscuras y las cuentas.

Hay cuatro piedras oscuras. Entonces te das cuenta que hay más piedras de colores pálidos y las cuentas.



Tienes cuatro piedras oscuras y siete piedras pálidas.

¿Cuántas piedras tienes en total? Cuéntalas.

Tienes un total de 11 piedras.

Utilizaste la **adición** para encontrar la suma de las piedras oscuras y las piedras pálidas. Para sumar 4 y 7, empezaste con 4, contaste 7 más, y terminaste con 11. Podrías haber empezado también con 7 y contado 4 más; la respuesta hubiera sido la misma.

- ✓ La adición se utiliza para contar el número de objetos en dos o más grupos.
- ✓ El símbolo empleado para la adición es “+”.
- ✓ La suma es el número que obtienes cuando pones dos o más números juntos.

Por ejemplo: 2 + 3 = 5. 9 más 7 es 16. La suma de 6 y 0 es 6.

Existen varias formas de mostrar la adición en matemáticas.

Por ejemplo, unir cuatro piedras oscuras y siete pálidas se puede escribir así:

$$4 + 7 = 11, \qquad \text{or} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ +\ 7 \\ \hline 11 \end{array}$$

Ambas formas de escribir el problema de adición son correctas. La segunda forma es más útil cuando sumas números grandes. Fíjate en este otro ejemplo:

Ejemplo: Jahmel lanzó una bola a 27 pies. La recogió y la lanzó de nuevo. La segunda vez cayó a 25 pies. ¿A cuántos pies en total lanzó la bola Jahmel? O, ¿cuál es la suma de las distancias a la que Jahmel lanzó la bola?

Solución Utiliza la adición para resolver el problema.

Paso 1: Alinea los números uno arriba del otro como se muestra.

Paso 2: Suma primero los dígitos del extremo <u>derecho</u>.

$$\begin{array}{r} 27 \\ +\ 25 \\ \hline \end{array}$$

7 + 5 = 12

Paso 3: Pon el 2 bajo la línea, y el 1 en el siguiente lugar, como se ve.

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 27 \\ +\ 25 \\ \hline 2 \end{array}$$

Paso 4: Ahora suma cada dígito de la siguiente columna.

1 + 2 + 2 = 5

Paso 5: Escribe el resultado a un lado del 2.

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 27 \\ +\ 25 \\ \hline 52 \end{array}$$

Por tanto, Jahmel lanzó la bola a 52 pies en total.

Regla

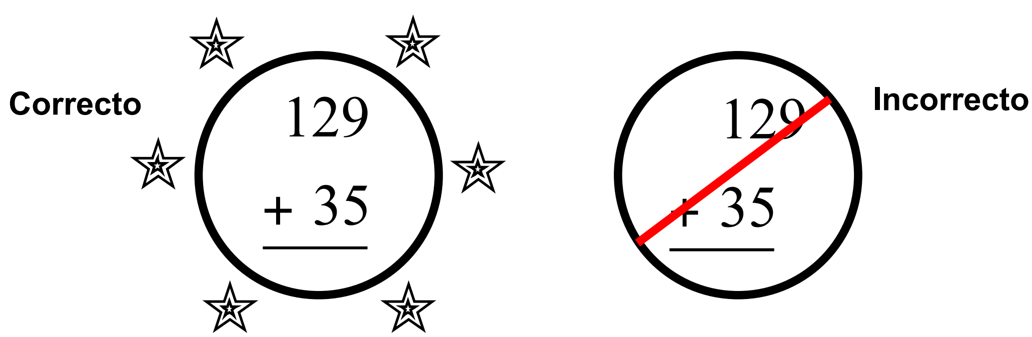
Para sumar dos o más números:

1. Escribe los números. Pon los dígitos de la <u>derecha</u> de cada número uno arriba del otro.
2. Suma todos los dígitos. Comienza por los de la derecha.
   - **a.** Si la primera suma es de diez o más, escribe el dígito en el lugar de los unos directamente debajo de los dígitos que sumaste.
   - **b.** Escribe el número en el lugar de las decenas arriba de la siguiente columna de la izquierda.
3. Suma los dígitos de la columna a la izquierda de la que acabas de sumar.
   - **a.** Si la suma da diez o más, repite el paso 2, a. y b.
4. Repite este proceso, de derecha a izquierda, hasta que cada columna de dígitos haya sido sumada.

Ve un ejemplo más.

Ejemplo Tony llenó el tanque de gasolina de su auto por $35. Más tarde, su auto se descompuso. La reparación costó $129. ¿Cuánto dinero en total gastó Tony ese día en su auto?

Solución Para resolver este problema, debes sumar 35 y 129. Cuando pongas los números uno arriba del otro, asegura que los <u>dígitos de la derecha</u> estén alineados.



Ahora, sigue los pasos estudiados. Trabaja de derecha a izquierda.

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 129 \\ +\ \ 35 \\ \hline 164 \end{array}$$

La suma final se verá así.

Tony gastó un total de $164 en su auto ese día.

Este método funciona también para sumar más de dos números.

¡Inténtalo!

1. Desarrolla las sumas siguientes

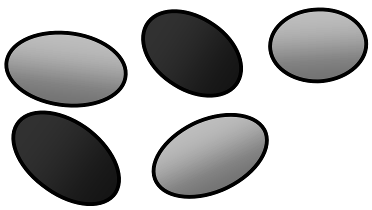
a. 1 + 2 =	**b.** 7 + 2 =	**c.** 11 + 4 =
d. 4 + 6 =	**e.** 7 + 6 =	**f.** 7 + 8 =
g. 14 + 7 =	**h.** 30 + 40 =	**i.** 179 + 5 =

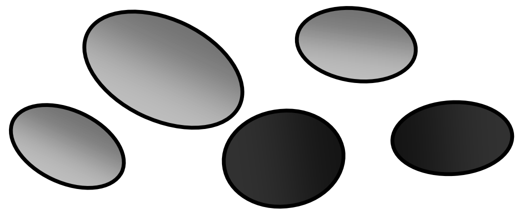
2. Pedro recogió 1,247 duraznos el lunes, y 989 el martes. ¿Cuántos duraznos recogió en total?

3. Encuentra la suma. 124 + 65 + 4

Sustracción

Estás de regreso en la playa. Esta vez, recogiste diez piedras. Decides regresar cinco de esas al agua, una por una. Ya que has arrojado la primera, quitas una de diez. Te quedan nueve piedras. Luego arrojas otra. Ahora, te quedan ocho. Luego siete, y finalmente, te quedan cinco piedras en la mano.





piedras arrojadas al agua

El proceso de restar se llama ***sustracción***.

- ✓ Se usa la **sustracción** cuando las cosas se restan de un grupo.
- ✓ El símbolo de la sustracción es una raya, "—". Se llama un signo de menos.
- ✓ La respuesta a un problema de sustracción se llama la diferencia.
- ✓ Existen tres formas de mostrar la sustracción:
  5 – 3 = 2. 14 menos 2 es 12. La diferencia entre 21 y 7 es 14.

Ejemplo: ¿Cuál es la diferencia entre 8 y 5?

Solución: Cuando se pide encontrar la <u>diferencia</u>, eso significa sustracción. Para encontrar 8 – 5, empieza con el 8, y cuenta hacia atrás hasta 5.

8	7	6	5	4	3
	1	2	3	4	5

Así, 8 – 5 = 3

Existe otro método más sencillo para encontrar la diferencia entre dos números. Éste utiliza la adición.

Ejemplo: Adrián compró víveres por un costo de $23. Entregó $30 al cajero. ¿Cuánto cambio debe recibir Adrián?

Solución: Para encontrar cuánto cambio debe recibir Adrián, debes encontrar la diferencia entre 30 y 23. Una forma de encontrarla es haciéndote esta pregunta, "¿23 más cuánto me dará 30?" en términos matemáticos:

$$23 + \_\_\_ = 30$$

Cuenta desde 23 hasta 30, y lleva cuenta de cuántos son.

24	25	26	27	28	29	30
(1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7)**

La respuesta es siete. $23 + \underline{7} = 30$

Adrián recibirá $7 de cambio.

Este método es muy útil para restar mentalmente. Mucha gente utiliza los dedos para restar con este método.

¿Qué pasaría si tuvieras que restar números grandes? ¿Te servirá contar con los dedos?

Ejemplo: Pedro tiene una bolsa con 150 dulces dentro. Regala 72 dulces en Halloween. ¿Cuántos dulces le quedaron?

Solución: Las palabras como *regalar*, *reducir, quitar*, o *menos* significan sustracción. En este caso, el problema dice que Pedro regala 72 dulces de los 150 que tiene. Eso significa sustracción: 150 – 72

Estos dos números son grandes. Para sustraerlos, utiliza el mismo método que empleaste al sumar números grandes. Sigue los pasos siguientes.

$$\begin{array}{r} 150 \\ -\ \ 72 \\ \hline \end{array}$$

Paso 1: Escribe los números uno arriba del otro, con los dígitos de la derecha perfectamente alineados.

Paso 2: Iniciando con los dígitos de la derecha, resta el dígito de abajo al de arriba.

$$\begin{array}{r} 150 \\ -\ \ 72 \\ \hline \end{array}$$

¿Cómo obtienes 0 – 2 ?
Dos es más que cero.

Debes utilizar el *método de pedir prestado*. Observa el número 150 y recuerda los valores de los lugares.

150 tiene 0 en las unidades, 5 en las decenas, y 1 en los cinetos.

Puedes pedir prestada una decena de las cinco que tienes para hacer la sustracción. Una decena vale diez unidades. (Piensa en dinero. Un billete de diez dólares se puede cambiar por diez billetes de un dólar). Toma 1 decena de las 5 y cámbiala por diez unidades.

$$\begin{array}{cccc} & & 4 & 10 \\ & 1 & \cancel{5} & \cancel{0} \\ - & & 7 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Tacha el 5 y quítale 1. 5 – 1 = 4. Pon el 4 arriba del 5 tachado.

Ahora tacha el 0, y súmale 10. 0 + 10 = 10. Ahora ya puedes sustraer el 2 de diez.

Ahora, observa el 4 y el 7 en la columna de en medio.
Como 7 es mayor que 4, nuevamente debes pedir prestado.

$$\begin{array}{cccc} & & 4 & 10 \\ & 1 & \cancel{5} & \cancel{0} \\ - & & 7 & 2 \\ \hline & & & 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & & 14 & \\ & & \cancel{4} & 10 \\ & \cancel{1} & \cancel{5} & \cancel{0} \\ - & & 7 & 2 \\ \hline & & 7 & 8 \end{array}$$

El problema terminado se verá así.

A Pedro le quedan 78 dulces en la bolsa.

Regla

Para sustraer dos números:

1. Escribe los números con los dígitos de la derecha uno directamente arriba del otro.
2. Iniciando con los dígitos de la derecha, resta el de abajo al de arriba.
   a. Si el dígito de abajo es más grande que el de arriba, pide una unidad prestada de las decenas del número de arriba. Quítale uno, y agrega diez a las unidades del número de arriba. Luego, haz la resta en la columna de las unidades.
3. Resta los dígitos en la columna de las decenas.
   a. Pide prestado del lugar de las centenas, si en la columna de las decenas el dígito de abajo es más grande que el de arriba.
4. Repite el proceso hasta que en cada columna de dígitos se haya realizado la sustracción.

¡Inténtalo!

4. Encuentra las diferencias.

a. 3 – 2 = **b.** 7 – 4 = **c.** 9 – 3 =

d. 6 – 5 = **e.** 8 – 1 = **f.** 11 – 3 =

g. 15 – 7 = **h.** 13 – 11 = **i.** 6 – 6 =

5. Resuelve los siguientes problemas de sustracción rescribiéndolos como problemas de adición. (*Ej:* 7 – 4 = __ debe ser reescrito como 4 + __ = 7)

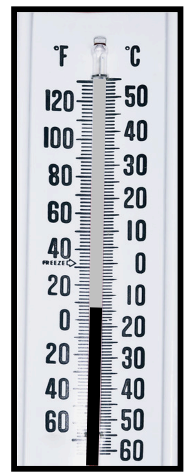
a. 17 – 13 = **b.** 12 – 9 = **c.** 56 – 52 =

c. 27 – 22 = **e.** 13 – 12 = **f.** 54 – 24 =

6. Tami está ahorrando dinero para viajar a Hawái en las vacaciones de primavera. El viaje costará $1745. Hasta ahora lleva ahorrado $1290. ¿Cuánto más debe ahorrar?

Utilizando Rectas Numéricas y Fichas de Enteros

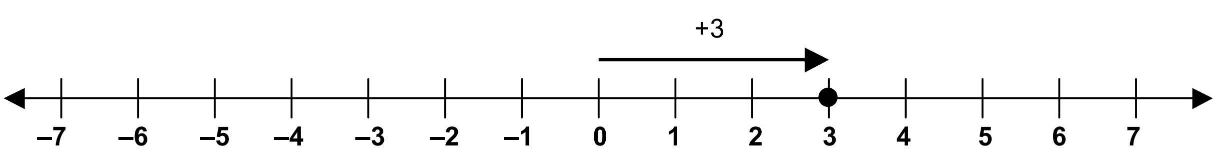
Se pueden usar las rectas numéricas y las fichas de enteros para sumar y restar. Pueden ser útiles en situaciones de la vida real.



Ejemplo: Una mañana lees la temperatura exterior. El termómetro tiene una lectura de tres grados. Se supone que la temperatura del día siguiente será de cinco grados más fría. ¿A qué temperatura estaremos el día de mañana?

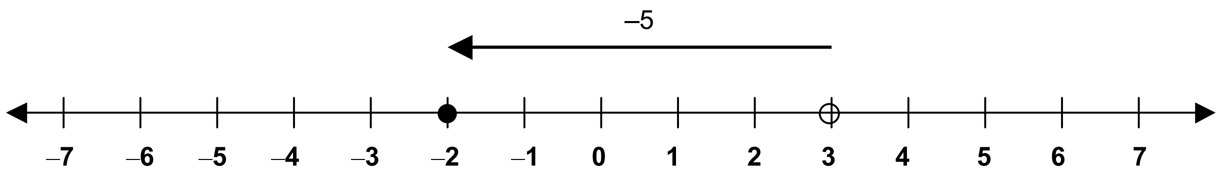
Solución: Estamos hablando de sustraer enteros. Para determinar la temperatura pronosticada para mañana, necesitamos restar 3 grados menos 5 grados, 3 – 5. Para pensar en este problema, utilicemos algo que nos sea familiar. ¿Qué tal una recta numérica?

En este problema, la temperatura en 3 grados positivos. Desarróllalo en la recta numérica.



Cuando no hay signo frente al número, éste es positivo.

Se supone que la temperatura bajará o se decrementará cinco grados. En matemáticas, "decrementarse" significa sustracción. En una recta numérica, vas a la izquierda para restar. Vas a la derecha para sumar. Cuenta cinco números a la izquierda de 3. Pon un punto en el nuevo número.



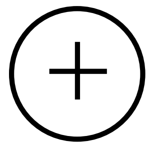
Terminamos en –2, así que 3 – 5 = –2. La nueva temperatura será de –2 grados.

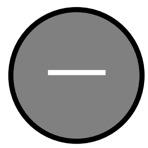
Resolverlo de esta manera se llama <u>método de la recta numérica</u>. Repasa los pasos que seguiste.

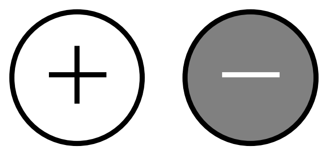
- ✓ Iniciando de cero, encontraste el número al inicio del problema (3).
- ✓ Pones un punto en su lugar sobre la escala de números.
- ✓ Luego, dibujaste una flecha sobre la línea, desde cero hasta el número.
- ✓ Para restar, contaste 5 números a la izquierda y pusiste un punto en el número nuevo (–2).
- ✓ Luego, dibujaste otra flecha sobre la línea, desde el primer número hasta el nuevo.

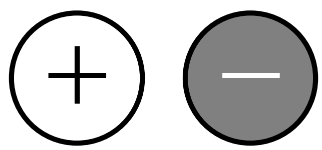
La solución del problema es el número que encontraste al final: –2.

Otra forma de resolver el problema es por el <u>método de fichas de los números enteros</u>. Existen dos tipos de fichas de números enteros diferentes:

La ficha positiva  = +1

Y la ficha negativa  = –1

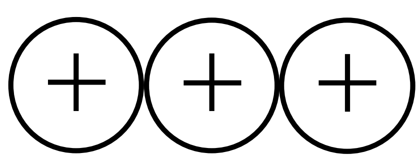
Cuando se combinan,  se igualan a 0

Ya que  = –1 + 1 = 0

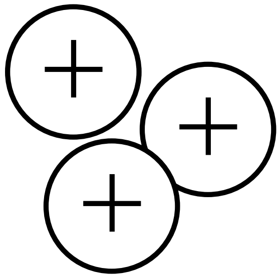
Se anulan uno al otro. Para demostrarlo, táchalos en cuanto los veas juntos.

Ahora, resuelve el problema de la temperatura utilizando este método.

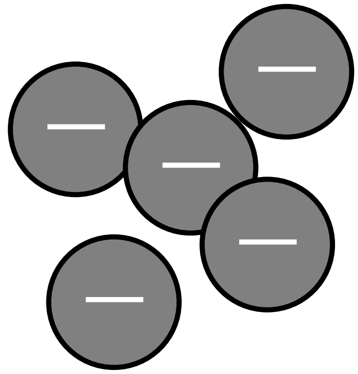
El problema inició con tres grados positivos. Ilustra esto con tres fichas positivas.



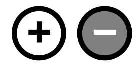
Luego, la temperatura cae a 5 grados. Agrega 5 fichas negativas a la pila.



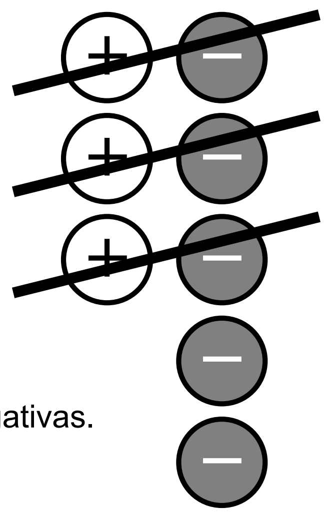
+3



–5

Recuerda: una ficha positiva y una negativa se anulan uno al otro.  = 0.
Reagrupa las fichas. Haz que cada ficha positiva y negativa coincidan.

¡Anulación!



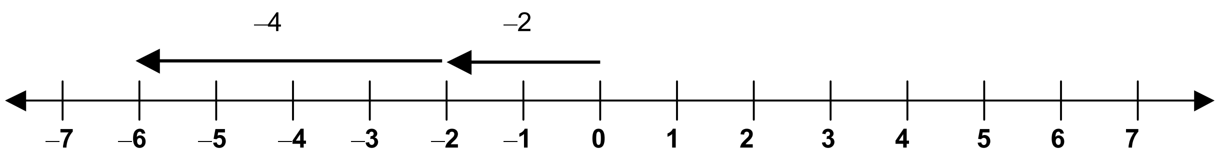
Puedes ver que solo quedan dos fichas negativas.

La temperatura será de –2 grados mañana.

Veamos otro ejemplo.

Ejemplo: ¿Qué resulta de –2 – 4?

***Solución*:** Utiliza una recta numérica. Tienes un número negativo menos otro número negativo. “Menos” significa sustracción. Te mueves a la izquierda. Primero encuentra –2. Empieza en cero sobre la escala de números y ve dos lugares a la izquierda. Ahora, resta 4. Muévete otros cuatro lugares a la izquierda.

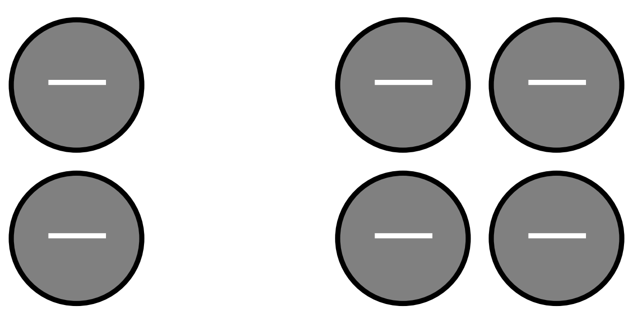


Llegas a –6. **Así que la respuesta es –2 – 4 = –6.**

Debes obtener la misma respuesta utilizando las fichas de enteros. Existen realmente dos formas de resolver el problema mediante fichas.

<u>Método 1</u>

La primera forma es pensando en –2 – 4 como dos fichas negativas más otros cuatro fichas negativas, o –2 + –4.

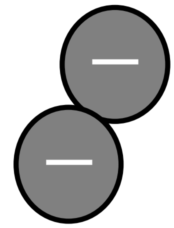


Puedes ver que hay 6 fichas negativas en total. Así, la respuesta es –6.

<u>Método 2</u>

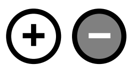
La segunda forma de pensar acerca de –2 – 4 es empezar con dos fichas negativas, y quitar cuatro fichas positivas, o –2 – (+4).

Aquí hay dos fichas negativas.



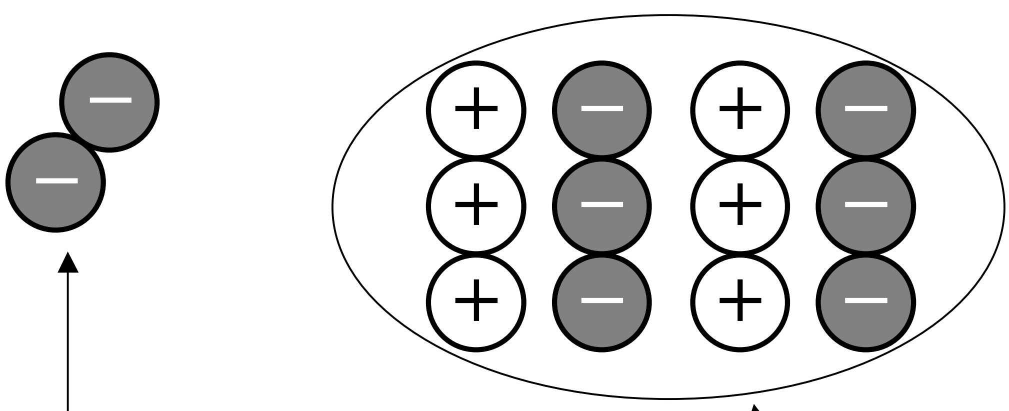
¿Cómo puedes quitar 4 fichas positivas si no hay ninguna ahí?

¿Y si tuvieras un número de fichas positivas y negativas que sean igual a –2?

Recuerda:  = 0 y un número más cero permanece igual.

✓ La **propiedad de identidad de la adición** dice que un número más cero es igual al número. El cero no cambia la "identidad" del número.
Por ejemplo, 5 + 0 = 5, o $a + 0 = a$.

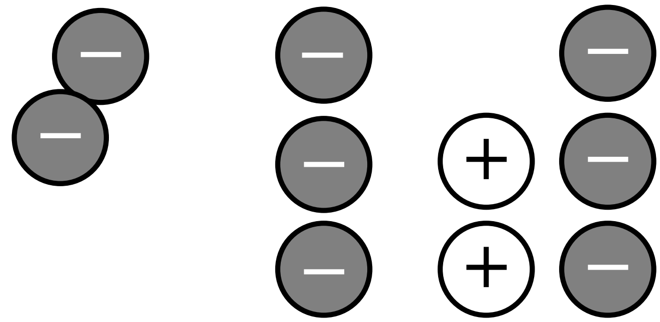
La propiedad de identidad te dejará sumar pares de fichas positivas y negativas, sin cambiar su valor.



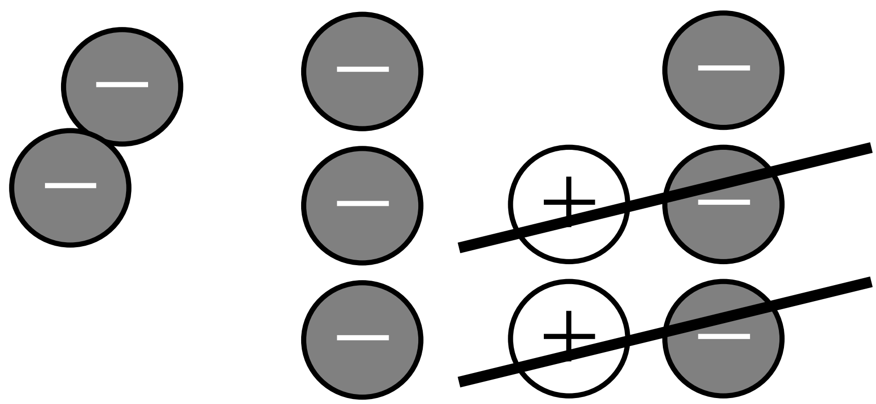
-2 + 0 = -2

Ahora tienes muchas fichas para utilizar.

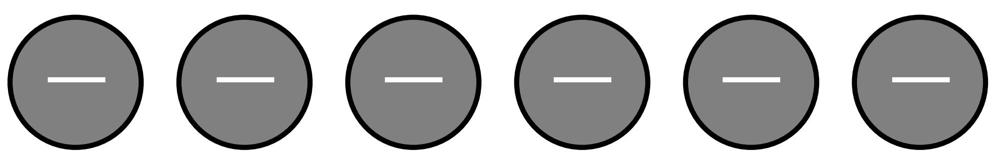
Para mostrar –2 – 4 como –2 – (+4), quita cuatro de las fichas positivas.



Ahora anula grupos de ⊕ ⊖.



Cuenta las fichas que quedan. Puedes ver que hay 6 fichas negativas.



La solución es –6.

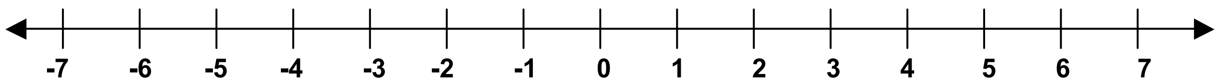
Los métodos de las fichas de enteros demostraron que se puede pensar en la sustracción de dos maneras:

- ✓ como sumar números negativos o
- ✓ ¡como quitar números positivos!

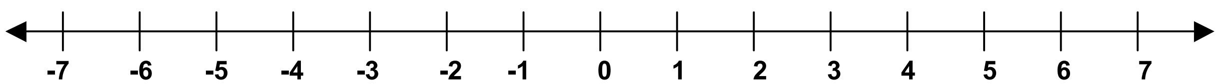
¡Inténtalo!

7. Muestra las siguientes sumas usando el método de la recta numérica.

a. –2 + 5



b. 4 – 3



8. Muestra estos problemas de sustracción utilizando ambos métodos de fichas de enteros (suma de fichas negativas, y sustracción de fichas positivas).

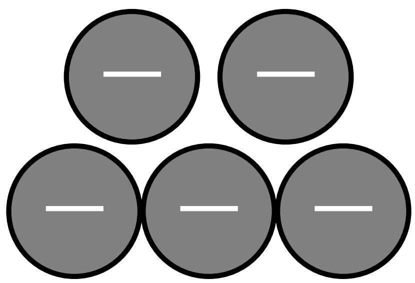
a. 3 – 7

b. 8 – 2

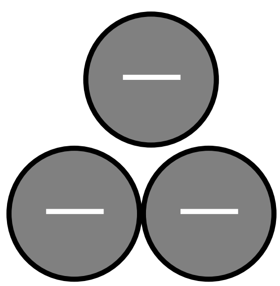
Ejemplo: Evalúa –5 – (–2)

Solución: Fíjate en esto. ¡Estás sustrayendo un número negativo de un número negativo! Esto podría ser confuso mostrarlo en una recta numérica, así que mejor usemos nuestras fichas de enteros.

Empieza con 5 fichas negativas.



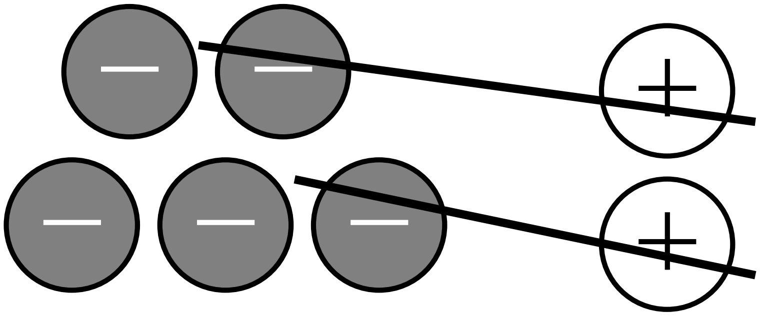
Luego, quita dos fichas negativas.



Te quedan 3 fichas negativas, o –3.

En ocasiones utilizamos paréntesis ( ) para facilitar su entendimiento. Aquí se usan para separar dos signos negativos.

Acabas de encontrar que –5 – (–2) = –3. ¿Que tal si evalúas –5 + 2? Utilizando las fichas, se verá como sigue:



Anula grupos de fichas positivas y fichas positivas, ya que su valor es cero.

Otra vez, la respuesta es –3.

¡Mira eso! Sustraer un número negativo es lo mismo que sumar un número positivo.

$$-5 - (-2) = -5 + 2 = -3$$

Regla

Para sumar o restar números enteros:

- ✓ Agregar un número entero positivo significa sumar 5 + (+8) = 5 + 8
- ✓ Agregar un número entero negativo significa restar 5 + (–8) = 5 – 8
- ✓ Restar un número entero positivo significa restar 5 – (+8) = 5 – 8
- ✓ Restar un número entero negativo significa sumar 5 – (–8) = 5 + 8

¡Inténtalo!

Simplifica cada expresión usando solo números.

9. **a.** 3 + 2

b. 6 – 9

c. –4 + (–3)

d. –7 – (–4)

Fin de la Lección 2

Lección 3

Multiplicación y División

Vocabulario:

- √ **multiplicación**
- √ **producto**
- √ **división**
- √ **cociente**
- √ **dividendo**
- √ **divisor**

L*A multiplicación* es adición repetida. La respuesta a un problema de multiplicación se denomina el **producto**. ¡Veamos!

Ejemplo: Has pasado el día en la playa y recogido muchas piedras. Ahora quieres contarlas. Decides hacer grupos de cinco piedras cada una. Te das cuenta que tienes nueve grupos de cinco piedras. ¿Cuántas piedras son en total?

$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 45$

Tienes cuarenta y cinco piedras en total. En lugar de sumar 5 nueve veces, pudiste haber utilizado la multiplicación.

- ✓ La multiplicación es lo mismo que sumar un número muchas veces, o adición repetitiva. 9 x 5 es lo mismo que sumar 5 nueve veces. Hay 9 grupos de 5. El símbolo que usamos para la multiplicación es "×"
- ✓ La respuesta a un problema de multiplicación se llama el producto. Por ejemplo, 3 x 2 = 6. 4 veces 3 es 12. El producto de 7 y 5 es 35.

Muchas reglas que se aplican a la adición también se aplican a la multiplicación. En la adición, puedes sumar números en cualquier orden y obtener el mismo resultado.

Por ejemplo: 3 + 2 = 5 y 2 + 3 = 5.

La misma regla es cierta para la multiplicación: 9 x 5 = 45 y 5 x 9 = 45. Nueve grupos de cinco es lo mismo que cinco grupos de nueve.

Hay una serie de pasos a seguir cuando deseas multiplicar números grandes.

Ejemplo: *Esmeralda está haciendo galletas en la panadería donde trabaja. Ella mezcla* suficiente masa para llenar 16 moldes de 12 galletas cada una. ¿Cuántas galletas en total horneará Esmeralda?

Solución: *Ella* llena 16 moldes de 12 galletas. Eso significa que ella tendrá 16 grupos de 12. En otras palabras, debes encontrar el producto de 16 y 12, o 16 x 12. Inicia colocando los números verticalmente, como lo hiciste antes con la adición y la sustracción.

$$\begin{array}{r} 16 \\ \underline{\times\ 12} \\ 2 \end{array}$$

Paso 1: Multiplica el dos y el seis. 2 x 6 = 12. Pon el dos del 12 abajo de la columna de los dígitos, y lleva el uno del 12 al lugar de las decenas.

$$\begin{array}{r} 2 \times 1 = 2 \\ \underline{+\ 1} \\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{1}\ \ \\ 16 \\ \underline{\times\ 12} \\ 32 \end{array}$$

Paso 2: Multiplica el dos y el uno. 2 x 1 = 2. <u>Suma</u> este al 1 que traes desde el primer paso. 2 + 1 = 3. Anota el tres abajo, en la columna de las decenas.

Paso 3 Cancela el 2 y el 1 que traías. Pon un cero debajo del 32 alineado con el 2.

$$\begin{array}{r} {}^{\cancel{1}}\ \ \\ 16 \\ \underline{\times\ 1\cancel{2}} \\ 32 \\ 0 \end{array}$$

Paso 4 Multiplica 1 y 6.

1 x 6 = 6

Escribe el 6 bajo el 3.

Paso 5: Multiplica 1 por el otro 1.

1 x 1 = 1

No hagas nada con el sobrante que tachaste.

Escribe el 1 enseguida del 6.

$$\begin{array}{r} \cancel{1} \\ 16 \\ \times\ 1\cancel{2} \\ \hline 32 \\ \mathbf{16}0 \end{array}$$

Paso 6: Finalmente, suma los dos productos.

32 + 160 = 192

$$\begin{array}{r} \cancel{1} \\ 16 \\ \times\ 1\cancel{2} \\ \hline 32 \\ +160 \\ \hline 192 \end{array}$$

Esmeralda horneó 192 galletas.

Ejemplo: Encuentra el producto de 15 x 13**.**

Solución: Aquí ilustraremos cada paso en una forma más condensada. Estudia cada paso de izquierda a derecha, y observa los cambios.

$$
\begin{array}{r}
\\
15 \\
\underline{\times\ 13} \\
\\
\\
\\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\cancel{1} \\
15 \\
\underline{\times\ 13} \\
45 \\
\\
\\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\cancel{1} \\
15 \\
\underline{\times\ 13} \\
45 \\
0 \\
\\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\cancel{1} \\
15 \\
\underline{\times\ 13} \\
45 \\
150 \\
\\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\cancel{1} \\
15 \\
\underline{\times\ 13} \\
45 \\
\underline{+\ 150} \\
195
\end{array}
$$

Tu labor de multiplicación debe verse como la columna del extremo derecho.

¡Inténtalo!

1. Determina los productos.

a. 3 x 2 =

b. 9 x 7 =

c. 5 x 3 =

d. 7 x 4 =

e. 3 x 9 =

f. 5 x 11 =

g. 2 x 4 =

h. 12 x 5 =

i. 8 x 8 =

2. Determina los productos.

a.
$$\begin{array}{r} 27 \\ \underline{\times\ 23} \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{r} 13 \\ \underline{\times\ 13} \end{array}$$

3. Isabel quiere saber cuánta gasolina compra en un año. Su auto tiene un tanque de 12 galones. Si ella llena el tanque 24 veces en el año, ¿cuántos galones de gasolina ha comprado ese año?

División

Recogiste cuarenta y cinco piedras el día que fuiste a la playa. Tu amigo, Alejandro, te lleva treinta más. Deseas contarlas en grupos de cinco. ¿Cuántos grupos de cinco piedras puedes formar con 30 piedras?

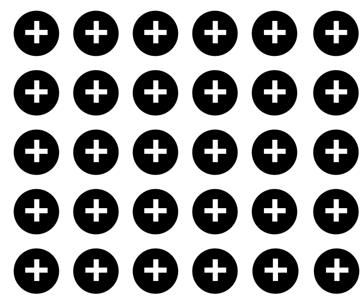
Para averiguarlo, debes dividir. Tienes que encontrar el cociente de 30 ÷ 5.

La **división** es el proceso de separar algo en grupos más pequeños, y de igual tamaño. Es una *sustracción repetitiva*.

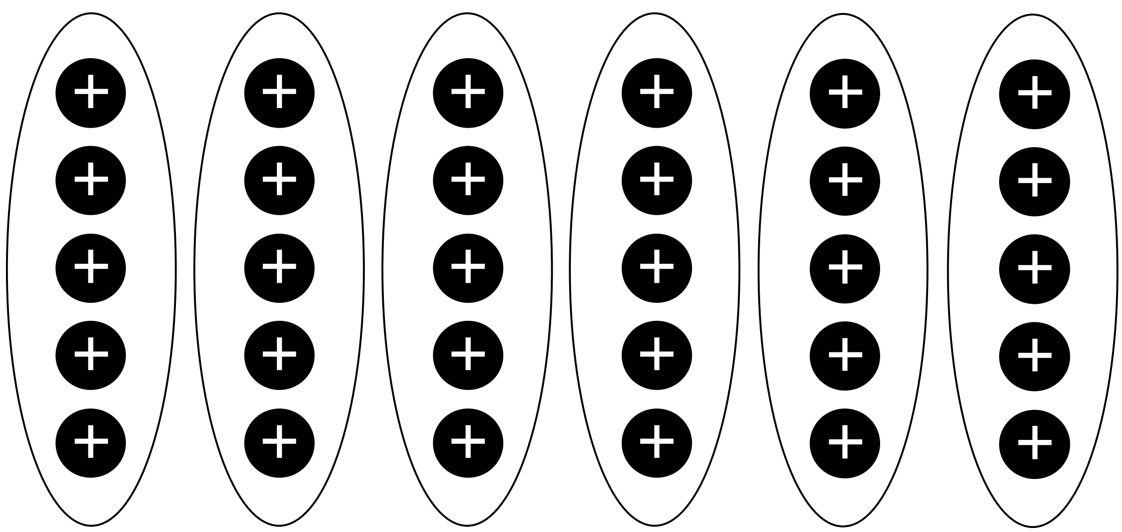
- ✓ El **cociente** es la <u>respuesta</u> a un problema de división.
- ✓ El **dividendo** es el <u>número que estás separando</u> en grupos. (30 en el ejemplo) es el número del cual restas.
- ✓ El **divisor** (5 en el ejemplo) es el número en que repartes. Puede ser el tamaño de cada grupo después de dividir. O, puede ser el número de grupos en que se separa un número.

Fíjate en el ejemplo de un problema de división: $6 \div 2 = 3$. Seis es el dividendo. Tres es el cociente. Dos es el divisor. Significa que hay tres grupos de dos en el número seis. También significa que seis se puede dividir en dos grupos de tres.

Ahora, volviendo a tu problema de averiguar en cuantos grupos de cinco se puede separar el 30. Utiliza fichas de enteros para representar las piedras. Haz que una ficha positiva represente una piedra.



Haz grupos de 5 fichas positivas cada uno.



Puedes formar seis grupos. Seis grupos de cinco piedras son treinta piedras. Esto suena a multiplicación, ¿verdad? Especificamente, $6 \times 5 = 30$.

Podrías haber resuelto este problema de división convirtiéndolo en un problema de multiplicación.

$30 \div 5 =$ ___ es lo mismo que preguntar $5 \times$ ___ $= 30$.

Ejemplo: Determina el cociente de 28 y 4.

Solución: Lo primero que debemos entender es que cociente significa dividir. Tienes que encontrar la solución a $28 \div 4$. Sabes que puedes convertirlo en un problema de multiplicación.

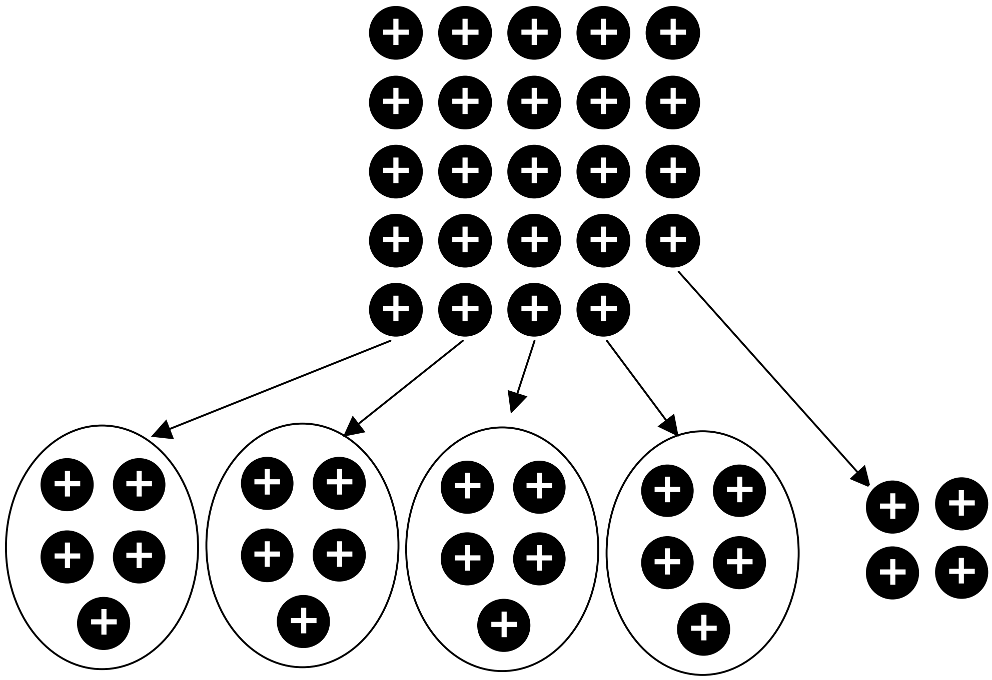
$$4 \times \_\_\_ = 28$$

Ahora la cuestión es más fácil de resolver.
Si no recuerdas las tablas de multiplicar, escribe algo como esto:

$$\begin{aligned} 4 \times 1 &= 4 \\ 4 \times 2 &= 8 \\ 4 \times 3 &= 12 \\ 4 \times 4 &= 16 \\ 4 \times 5 &= 20 \\ 4 \times 6 &= 24 \\ 4 \times 7 &= 28 \end{aligned}$$

Ves que $4 \times 7 = 28$. La respuesta al problema de división, o cociente, es 7.

Justo al terminar de resolver el problema, Alejandro trae más piedras. Esta vez, hay 24 piedras para dividir en grupos de 5.



Hay cuatro grupos completos de 5 piedras y sobran 4 piedras más.

En matemáticas, este cuatro sobrante se llama ***residuo***.

✓ El residuo es la cantidad que sobra después de la división.
Para mostrar un residuo, pon una "*R*" después del resultado de la división normal. Escribe el número residual directamente después de la "R".
Por ejemplo, el problema de arriba se escribiría así:

$24 \div 5 = 4$ *R4*

HECHO

El residuo debería siempre ser más pequeño que el divisor. Si es más grande que el divisor, tienes que seguir dividiendo hasta que el residuo sea menor que el divisor.

Ya aprendiste que la multiplicación es en realidad una adición repetitiva, o sumar muchas veces. La división se puede conocer como <u>sustracción repetitiva</u>. El problema de las piedras, 24 ÷ 5, lo puedes ver de esta forma:

"¿Cuántas veces puedo restar 5 de 24 sin convertirlo en negativo?"

Puedes restar 5 de 24 cuatro veces, y luego que te queden cuatro. Eso significa que tu respuesta es 4 *R*4.

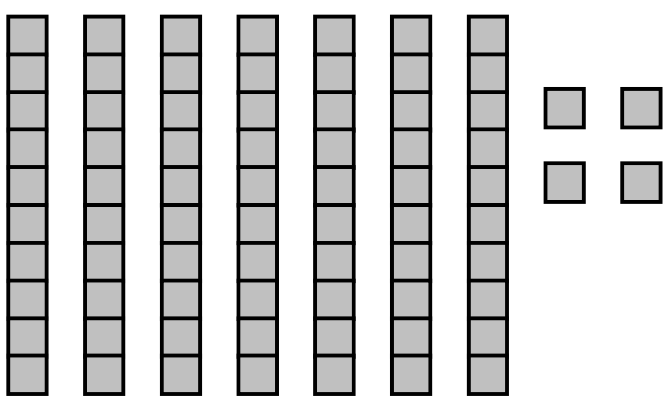
$$\begin{array}{r} 24 \\ \underline{-\ 5} \\ 19 \\ \underline{-\ 5} \\ 14 \\ \underline{-\ 5} \\ 9 \\ \underline{-\ 5} \\ 4 \end{array} \qquad 4 \quad R4$$

Pensar en la división como en una sustracción repetitiva ayuda a definir una regla para dividir números grandes.

Ejemplo: Resuelve 74 ÷ 3.

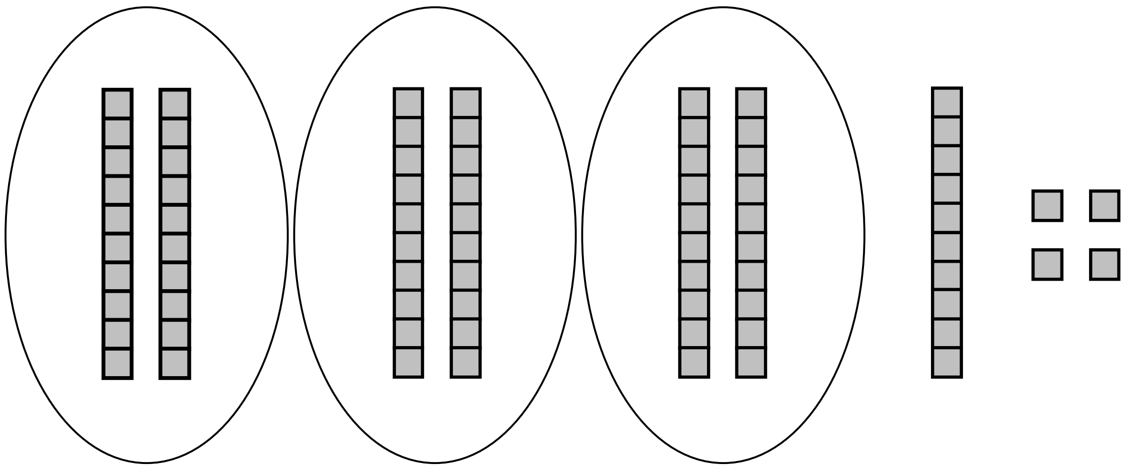
Solución: En el número 74, 7 está en el lugar de las decenas, y 4 en el lugar de las unidades.

Tambén puedes decir que hay 7 decenas y 4 unidades. Visualmente, se ve así:

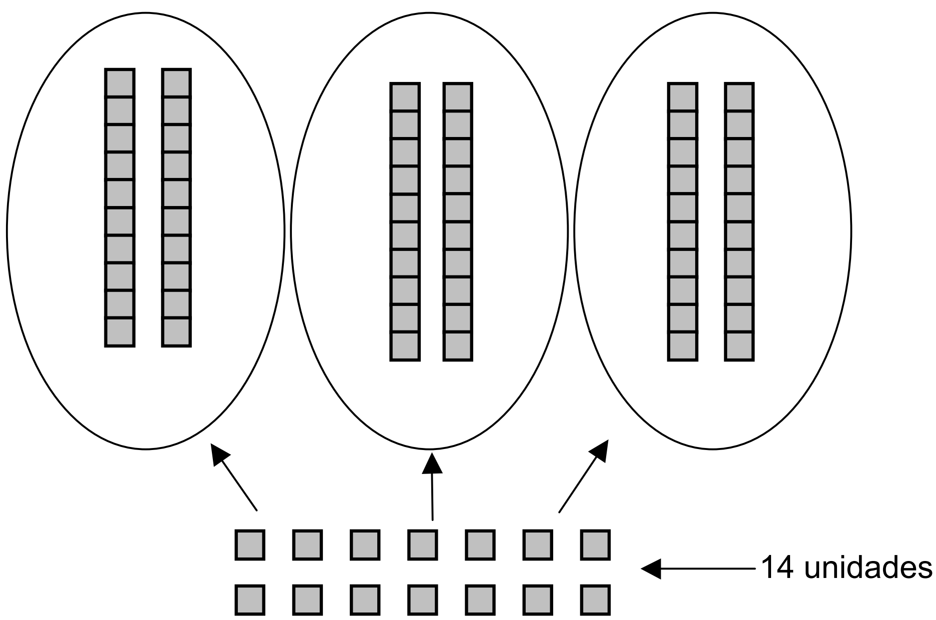


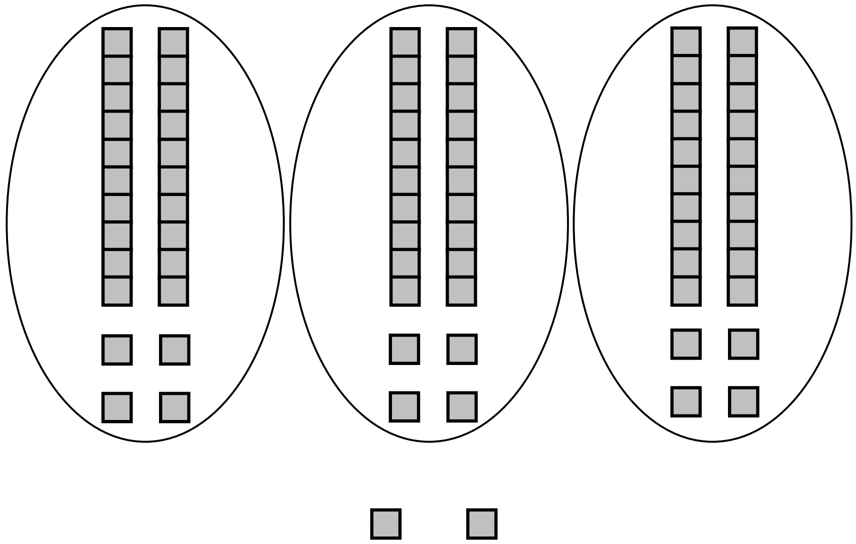
Tienes que dividir 74 en tres grupos.

Primero, divide los grupos de decenas



Dos decenas caben bien en cada grupo. Sobran una decena y cuatro unidades. No puedes dividir 10 unos en forma igual entre los tres grupos. Debes guardarlo como 10 unidades, y agregar el residuo 4. Ahora tienes 14 unidades para dividir entre los tres grupos.





Puedes ver que cada grupo contiene 2 decenas y 4 unidades. Hay 2 decenas restantes. Las 2 unidades no pueden seguir dividiéndose en tres grupos. Por lo tanto, la respuesta será, **24 *R*2.**

Este método también se puede mostrar con números.

En lugar de escribir 74 ÷ 3, puedes escribir $3\overline{)74}$

Significa exactamente lo mismo. Entonces, justo como hiciste con los bloques, dividimos las decenas entre tres.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 3\overline{)74} \\ \underline{6} \\ 1 \end{array}$$

Paso 1: 7 decenas se dividen entre 3 grupos de 2 decenas

Paso 2: 3 grupos de 2 decenas son 6 decenas

Paso 3: Todavía queda una decena por dividir, la cual no se divide exactamente en tres grupos.

En este punto en el modelo gráfico, descompones el grupo de diez en 10 unos, y lo combinas con los 4 unos. Esto se muestra de la siguiente manera.

$$\begin{array}{r} 24 \\ 3\overline{)74} \\ \underline{-6} \\ 14 \\ \underline{-12} \\ 2 \end{array}$$

Paso 4: Combina las 4 unidades con la decena 1 para obtener 14 unidades. Ahora solo debemos dividir 14 unidades en 3 grupos.

Paso 5: 14 unidades se dividen en 3 grupos de 4.

Paso 6: 3 grupos de 4 unidades son12 unidades

Paso 7: Nota que todavía quedan 2 unidades. Éste es el residuo.

La solución final, mostrando todo el trabajo, se verá así,

$$\begin{array}{r l} 24 & R\,2 \\ 3\overline{)74} & \\ -6 & \\ \hline 14 & \\ -12 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

Paso 8: Escribe el residuo.

¡Inténtalo!

4. Determina los cocientes reescribiendo los problemas de división como problemas de multiplicación. (Por ejemplo, encontrar 10 ÷ 2 = ___, escribirías 2 x ___ = 10, y luego llenas el espacio 2 x $\underline{5}$ = 10.)

a. 12 ÷ 2 = ___ **b.** 16 ÷ 4 = ___ **c.** 50 ÷ 25 = ___

d. 24 ÷ 8 = ___ **e.** 35 ÷ 7 = ___ **f.** 18 ÷ 2 = ___

g. 100 ÷ 4 = ___ **h.** 20 ÷ 5 = ___ **i.** 36 ÷ 12 = ___

Utiliza el método de paso por paso para encontrar los cocientes. Puede haber residuos.

5. $2\overline{)28}$

6. $2\overline{)428}$

7. $4\overline{)27}$

8. $3\overline{)32}$

9. $5\overline{)223}$

10. $6\overline{)1000}$

11. Una escuela se divide en los grados novena, décimo, decimoprimero, y decimosegundo. Cada grado tiene el mismo número de estudiantes. Si hay 1,424 estudiantes en la escuela, ¿cuántos estudiantes están en décimo grado?

Multiplicación y División de Números Negativos

Cuando multiplicas o divides números negativos, debes poner atención a sus signos (+ o –).

Ejemplo: La competencia Iditarod es una carrera de trineos tirados por perros que se corre en Alaska cada año. Durante la carrera la temperatura puede bajar bastante más bajo de cero. Un año, durante la carrera la temperatura en un punto de revisión era de –35º. De ahí, los competidores subieron por una montaña. En el siguiente punto de revisión, la temperatura era dos veces más fría.

¿Cuál era la temperatura en el segundo punto de revisión?

cortesía de Frank Kovalchek

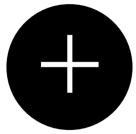
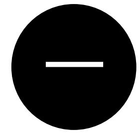
Solución: En este problema, la foto de arriba y la información acerca de la carrera Iditarod no son necesarias. Solo emplea lo más importante. Sabes que la primera temperatura fue de –35º. La segunda temperatura es <u>dos veces más fría</u> que –35º. En matemáticas, puedes escribir este cambio de temperatura como

$$\begin{array}{r} -35 \\ \underline{\times\ \ 2} \end{array}$$

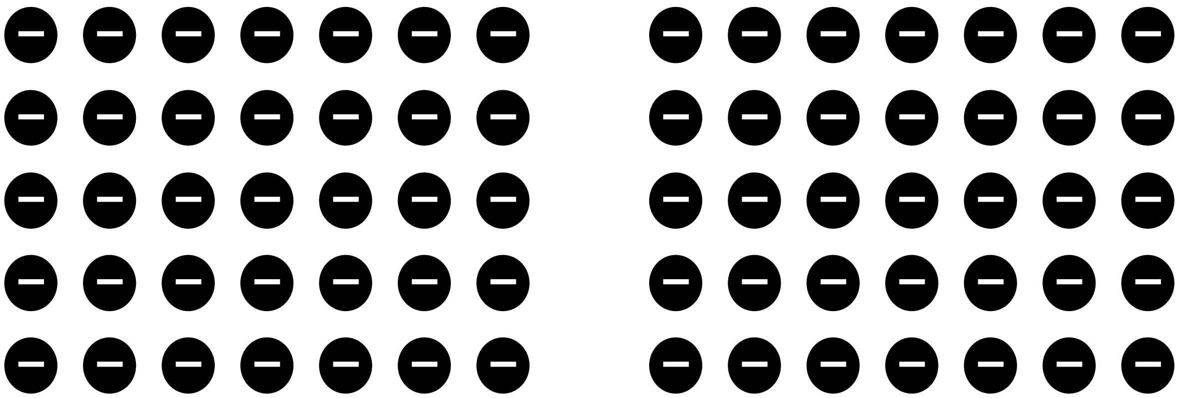
Ésta es la primera vez que ves la multiplicación con números negativos. Piensa en lo que significa la expresión, –35 x 2. Esto significa “dos grupos de 35 negativos”. Puedes utilizar las fichas de enteros para ilustrarlo. Recuerda lo aprendido en la Lección 1.

> ***Recuerda***
>
> *Puedes multiplicar los números en el orden que sea. ¡Da el mismo resultado!*
>
> 3 x 2 = 2 x 3 =6

De la lección anterior,

tenemos una ficha positiva  = +1 y una negativa  = –1.

Ahora debemos ilustrar dos grupos de –35. Aquí están.



Si cuentas, hay 70 fichas de enteros negativos. Representan -70. Eso significa que –35 x 2 = –70. La temperatura en el segundo punto era de –70.

Utilizar fichas para multiplicar y dividir números negativos puede ser difícil. Existen reglas que facilitan este proceso.

Regla

Para multiplicar o dividir <u>dos</u> enteros:

1. Ignora los signos (+ o –) de los enteros.
2. Multiplica o divide como si fueran positivos los dos.
3. Anota el producto o el cociente.
4. Ahora fíjate en los signos de los dos números originales.
    - **a.** Si ambos tienen el mismo signo, la respuesta será positiva (+).
    - **b.** Si los signos son diferentes, la respuesta será negativa (–).

Ejemplo: Simplifica 12 ÷ –3

Solución: Primero pon esto como un problema de división y resuélvelo ignorando los signos.

$$\begin{array}{r} 3\overline{)12} \end{array} \xrightarrow{\textbf{paso 1}} \begin{array}{r} 4 \\ 3\overline{)12} \end{array} \xrightarrow{\textbf{paso 2}} \begin{array}{r} 4 \\ 3\overline{)12} \\ \underline{-12} \\ 0 \end{array}$$

Encuentras un 4 y no hay residuo. Ahora, veamos los números originales, 12 y –3. Los signos son positivo (+) y negativo (–). Estos signos son <u>diferentes</u>, por tanto sabemos que la respuesta es negativa.

Por lo tanto, 12 ÷ –3 = –4.

Nota que esta respuesta es también correcta para **–12** ÷ 3.

Ejemplo: Determina el producto. –12 x –9

Solución: Primero multiplica como lo harías con números positivos.

$$\begin{array}{r} 12 \\ \underline{\text{x}\ \ 9} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} {}^{1}\ \ \, \\ 12 \\ \underline{\text{x}\ \ 9} \\ 108 \end{array}$$

Ahora, fíjate en los signos de los dos números originales, –12 y –9. Los dos signos son iguales, por tanto la respuesta será positiva.

Por lo tanto, –12 x –9 = 108.

¡Inténtalo!

12. Encuentra los productos.

a. –2 x –3 ______ **b.** –4 x 2 ______ **c.** 6 x 5 ______ **d.** 8 x –4 ______

e. –9 x –7 ______ **f.** –6 x 4 ______ **g.** 12 x –11 ______ **h.** 8 x 7 ______

13. Encuentra los cocientes.

a. –8 ÷ –2 ______ **b.** 14 ÷ –7 ______ **c.** –20 ÷ 10 ______ **d.** 18 ÷ 9 ______

e. –25 ÷ 5 ______ **f.** 24 ÷ –6 ______ **g.** –100 ÷ –10 ______ **h.** –2 ÷ 1 ______

NOTAS o preguntas que quisieras hacer:

Fin de la Lección 3

Lección

4

Factores y Múltiplos

Vocabulario:

√ **factores**
√ **múltiplos**

Los ***factores*** son los números que al multiplicarlos entre sí dan por resultado otro número diferente. Veamos de cerca los factores.

Ejemplo: Un día, tú y tus amigos deciden que van a jugar basquetbol. Son 12 personas en total. ¿Cuántos equipos se pueden formar con esas personas?

Puedes visualizar este problema haciendo uso de la multiplicación.

Tú y tus amigos integran 1 grupo de 12 personas: 1 x 12 = 12.

Puedes formar 2 equipos de 6 personas: 2 x 6 = 12.

o 3 equipos de 4 personas: 3 x 4 = 12.

También puedes formar 4 equipos de 3, 6 equipos de 2, e incluso 12 equipos de 1.

4 x 3 = 6 x 2 = 12 x 1 = 12

Los números enteros utilizados y que multiplicados entre sí dan 12 son:

1, 2, 3, 4, 6, 12

Todos ellos son factores de 12. Nota también que 12 es divisible entre todos estos números.

Lee con atención la siguiente definición.

- ✓ Cuando los números enteros, diferentes de cero, se multiplican entre sí, cada número es un **factor** del producto.

Ejemplo: 2 y 7 son factores de 14, porque 2 x 7 = 14. En forma similar, si un número entero se divide exactamente entre otro número, el divisor y el cociente son factores de ese número. 7 y 2 son factores de 14, porque 14 ÷ 7 = 2.

En el problema del basquetbol, dos de las diferentes maneras de formar los grupos fueron

3 x 4 y 4 x 3

Cuando anotas los factores de un número, cuenta cada factor una sola vez. No se anota el mismo factor dos veces. De esta manera, el 3 y el 4 se anotan una sola vez como factores de 12.

¡Inténtalo!

Enlista todos los factores de los siguientes números:

a. 24

b. 10

c. 36

Otros dos factores de 12 son 2 y 6. Nota que 2 no tiene más factores que el 1 y el 2 mismo. Esto se debe al hecho de que el 2 se define como un número primo.

✓ Un número se define como ***primo*** si sus <u>únicos</u> factores son 1 y el número mismo. Por ejemplo, 5 es número primo porque los únicos números en que se divide exactamente son 1 y el 5 mismo.

El número 6 no es un número primo. Tiene más factores que el 1 y el 6 mismo. Todos los números en que el 6 se divide exactamente son

1, 2, 3, 6

El seis tiene más factores que el 1 y el mismo 6. A esto se le llama un número compuesto. El 6 es una composición de muchos factores.

- ✓ Un ***número compuesto*** es un número entero más grande que 1 que tiene factores además del 1 y el número mismo. Por ejemplo, 4 es un número compuesto porque tiene los factores 1, 2, y 4.

El número compuesto 6 puede ser escrito como el producto de dos de sus factores

Si $12 = 6 \times 2$

Entonces $12 = 2 \times 3 \times 2$

HECHO

El número 1 ¡no es ni número primo ni número compuesto!

2 x 3 es igual a 6. Puede sustituirse por 6 en la ecuación.

Puedes ver que el número 12, escrito como

$$12 = 2 \times 3 \times 2$$

tiene dos factores de 2, y uno de 3.

Escrito de esta manera, todos los factores de 12 son números primos.

HECHO

Cada número entero se puede escribir ¡como el producto de factores primos! Ésta es una propiedad muy especial denominada ¡Teorema Fundamental de la Aritmética!

Una manera de factorizar un número en números primos es utilizar un <u>árbol de factores</u>.

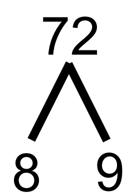
Ejemplo: Escribe 72 como el producto de sus factores primos.

Solución: Puedes resolver esto con el método del árbol de factores.

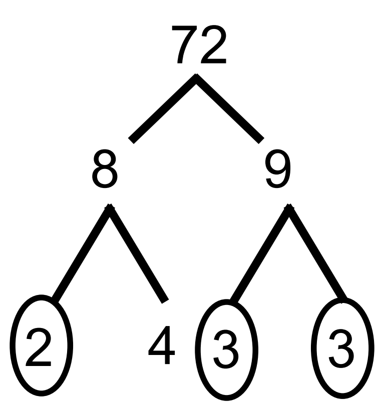
Paso 1: Escribe el número que deseas factorizar.

72

***Paso 2*:** Dibuja dos “ramas” hacia abajo del número. Coloca dos de sus factores en el extremo de las ramas. Nunca utilices el factor 1.

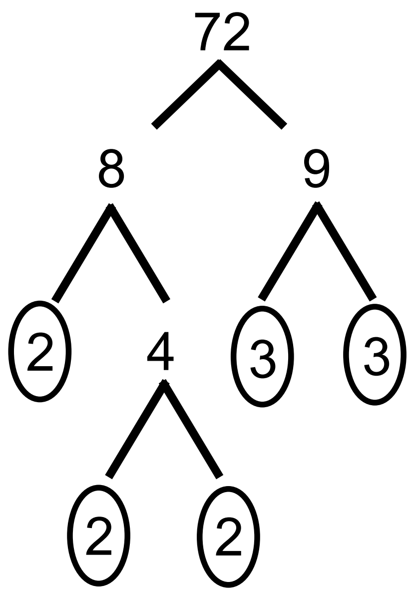


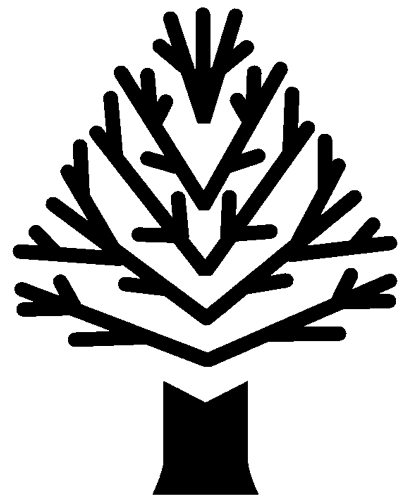
Paso 3: Continúa dibujando ramas debajo de cada factor, hasta que hayas alcanzado un número primo. Circula los factores primos cuando se presenten.



Factoriza 8 y 9, y circula los factores primos.

Ahora, factoriza el 4 y circula sus factores primos.





Ahora tu árbol de factores está completo, ¡pero aún no has terminado!

Paso 4: Escribe la respuesta como un producto de números primos. El producto final es igual a

72 = 2 x 3 x 3 x 2 x 2 = 2 x 2 x 2 x 3 x 3

HECHO

El orden en que multiplicas los números no importa.

Regla

Para factorizar un número:

1. Escribe el número que deseas factorizar en el nivel de arriba.
2. Dibuja dos ramas bajo el número. Escribe los factores del número al final de las ramas. No utilices el 1 ni el número mismo como factores a menos que no haya otros.
3. Circula cualesquier números primos. Continúa factorizando los números compuestos hasta que todos los factores sean primos. Circúlalos.
4. Escribe el número como un producto de sus factores primos.

¡Inténtalo!

2. Factoriza cada número utilizando un árbol de factores. Luego escribe el número como un producto de factores primos.

a. 64 **b.** 100 **c.** 36

El método del árbol de factores es muy útil para encontrar los factores primos de un número. También lo puedes utilizar para encontrar factores que sean comunes a dos (o más) números.

Comparación de los factores de <u>dos (o más)</u> números:

- ✓ Los factores que no se comparten se llaman *factores únicos*.
- ✓ Los factores que los números comparten se llaman factores comunes.
- ✓ El factor más grande que comparten dos (o más) números es su factor común más grande, o su **FCMG**. Por ejemplo, 2 es el FCMG de 4 y de 6.

Ejemplo: Encuentra el factor común más grande de 90 y de 135.

Solución: Los pasos para resolver este problema son

- enlista los factores de cada número,
- encuentra sus factores comunes, y
- determina cual factor es el más grande.

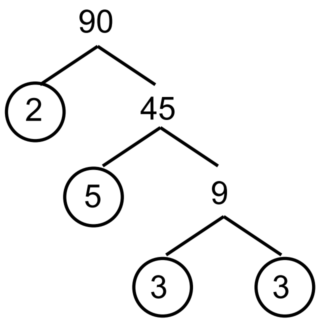
Factores de 90:	1,	2,	3,	5,	9,	10,	18,	30,	45,	90
Factores de 135:		1,	3,	5,	9,	15,	27,	45,	135	

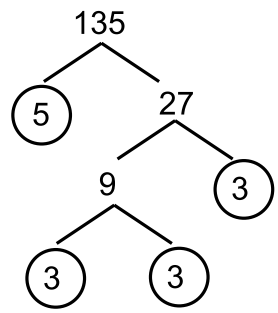
Puedes ver que 45 es el FCMG de 90 y de 135.

Este método tiene sus problemas. No fue eficaz para enlistar cada factor de 90 y de 135. También es fácil omitir factores, y cometer errores. Existe una forma más fácil para resolver el problema. Esta forma utiliza árboles de factores y <u>diagramas de Venn</u>.

eEl otro método:

Paso 1: Factoriza cada número utilizando un árbol de factores. Rescríbelo como un producto de factores primos.

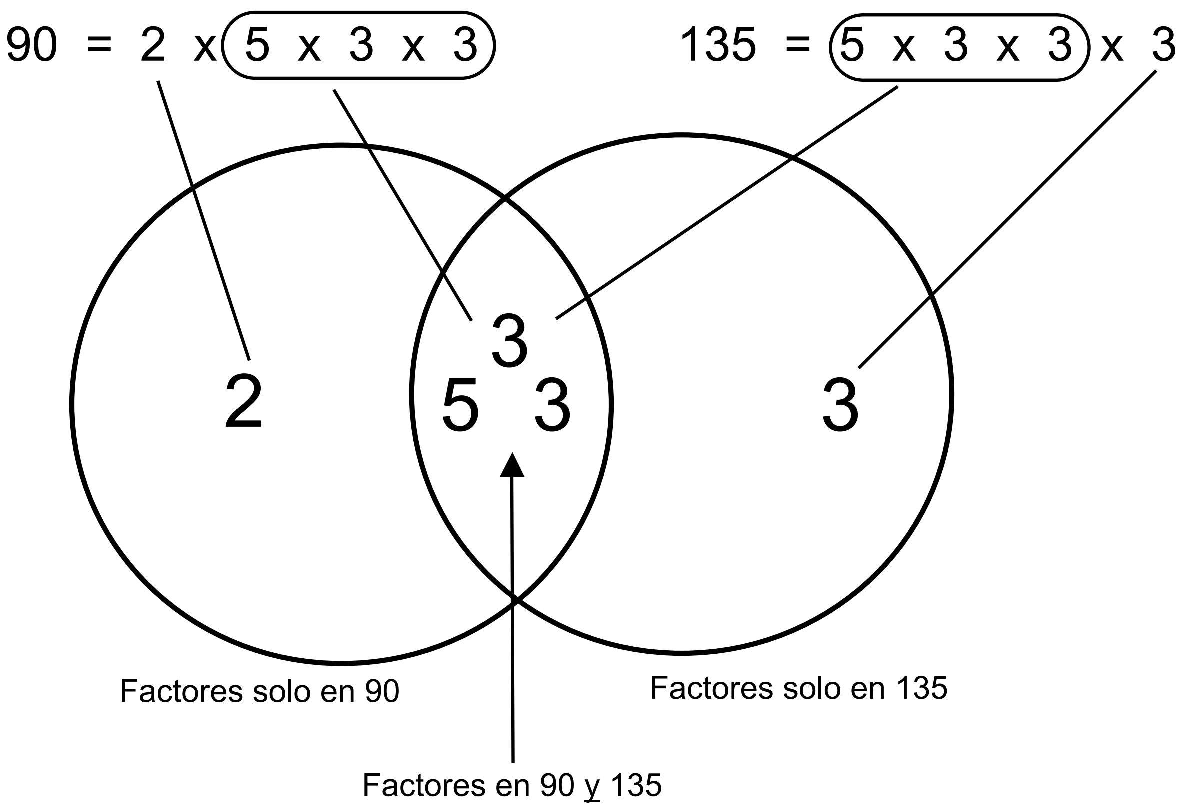




90 = 2 x 5 x 3 x 3

135 = 5 x 3 x 3 x 3

Paso 2: Ordena utilizando un diagrama de Venn.



Paso 3: El primer método demostró que el FCMG de 90 y de 135 es 45.

Observa los factores primos comunes de 90 y 135.
Éstos son 5, 3, y 3. Nota que 5 x 3 x 3 = 45.

El método del diagrama de Venn te dio la misma respuesta que el primer método. Y, ¡es una buena forma de evitar el olvido de los factores!

Regla

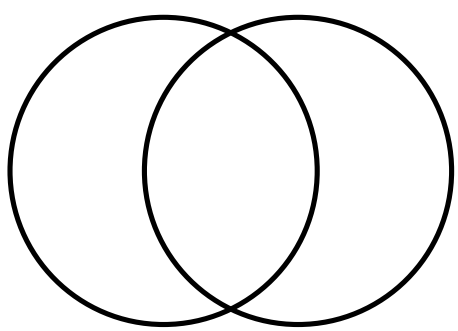
Para encontrar el factor común más grande (FCMG):

1. Factoriza cada número y reescríbelo como un producto de factores primos.
2. Organiza los factores de cada número utilizando un diagrama de Venn.
3. Multiplica entre sí todos los números de la sección central del diagrama de Venn. Este producto será el FCMG.

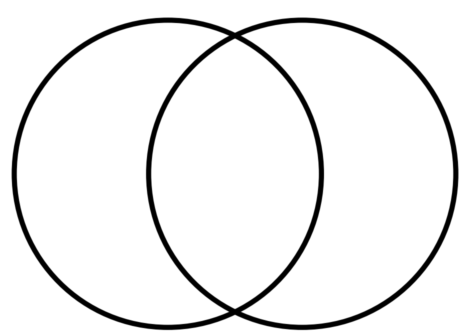
¡Inténtalo!

3. Encuentra el factor común más grande para cada par de números.

a. 72 y 108



b. 70 y 315



Múltiplos

Has invitado a tus amigos a una parrillada en tu casa. Necesitas conseguir salchichas y pan. Las salchichas vienen en paquetes de 6. Los panes para salchichas vienen en paquetes de 8. Te gustaría tener el mismo número de salchichas y panes. Necesitarás entonces comprar múltiples paquetes de salchichas y de pan hasta que tengas el mismo número de cada uno. ¿Cómo puedes averiguar cuántos paquetes de salchichas y cuántos paquetes de pan para salchichas debes comprar?

Este es un problema de multiplicación. El número de salchichas que compras será igual al número de paquetes multiplicado por 6 salchichas en cada uno.

El número de salchichas que podrías comprar es

6 salchichas x 1 paquete = 6
6 salchichas x 2 paquetes = 12
6 salchichas x 3 paquetes = 18
6 salchichas x 4 paquetes = 24
6 salchichas x 5 paquetes = 30
6 salchichas x 6 paquetes = 36

El número de panes para salchichas que podrías comprar es

8 panes x 1 paquete = 8
8 panes x 2 paquetes = 16
8 panes x 3 paquetes = 24
8 panes x 4 paquetes = 32
8 panes x 5 paquetes = 40
8 panes x 6 paquetes = 48

Las salchichas vienen en múltiplos de 6, y los panes vienen en múltiplos de 8.

> ✓ Un **múltiplo** de un número es el producto de ese número y cualquier número entero diferente de cero. Por ejemplo, 20 es múltiplo de 4. (4 x 5 = 20)

Como puedes ver, 6 y 8 tienen algunos múltiplos en común.

Múltiplos de 6:	6,	12,	18,	24,	30,	36,	42,	48…
Múltiplos de 8:	8,	16,	24,	32,	40,	48,	56,	64…

Puedes ver que tanto el 6 como el 8 tienen los múltiplos 24 y 48. Estos se llaman <u>múltiplos comunes</u>. Volviendo a la parrillada, múltiplos comunes significa que tendrás la misma cantidad de salchichas que de panes. El múltiplo más pequeño que comparten estos números es el menor múltiplo común.

> ✓ El múltiplo más pequeño que comparten dos números se llama el menor múltiplo común, o **MMC**.

El menor número de salchichas y panes para salchichas que debes conseguir es 24. Si compras cuatro paquetes de salchichas y 3 paquetes de panes para salchichas, tendrás 24 de cada uno.

$$4 \times 6 = 3 \times 8 = 24$$

Ejemplo: Encuentra el MMC de 12 y 20.

Solución: Enlista los múltiplos de cada número.

Múltiplos de 12 son: 12, 24, 48, **60**, 72, …
Múltiplos de 20 son: 20, 40, **60**, 80, 100, …

El menor múltiplo común es 60.

HECHO

El MMC de dos números es el producto de esos dos números dividido entre su FCMG.

Verifica si la máxima anterior funciona.

Factores de 12:	1,	2,	3,	**4**,	6,	12
Factores de 20:	1,	2,	**4**,	5,	10,	20

4 es el FCMG. **12 x 20 = 240**

240 ÷ 4 = 60

¡Funciona! Puedes utilizar este hecho para verificar tu respuesta cuando encuentres el MMC de dos números.

¡Inténtalo!

4. Encuentra el <u>menor múltiplo común</u> para cada par de números.

a. 8 y 16

b. 24 y 84

c. 13 y 17

NOTAS o preguntas que deseas hacer:

Fin de la Lección 4

Lección

5

Fracciones

Vocabulario:

√ **fracción**
√ **numerador**
√ **denominador**
√ **numero mixto**

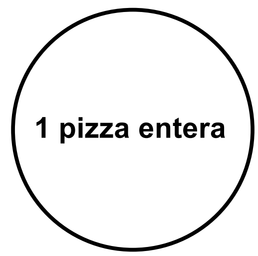
Una **fracción** contrasta las partes contra el entero. Es el cociente de dos números, a y b. Una fracción se puede escribir como $\frac{a}{b}$ y significa **a ÷ b**. El número de arriba en la fracción se denomina **numerador**. El número de abajo en la fracción se conoce como **denominador**. Un **número mixto** es la suma de un entero y una fracción. El signo **+** no se muestra. Se ve como esto, $3 + \frac{2}{3} = 3\frac{2}{3}$.

Imagínate que trabajas en una pizzería. Una noche, una familia de cuatro entra y ordena una pizza. Ellos te piden que la cortes en cuatro partes iguales – una para cada miembro de la familia.

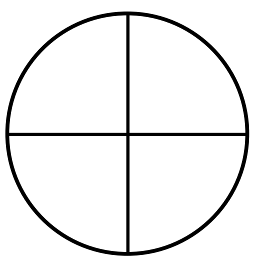
Justo después de eso, entra una familia de cinco, y ordena en forma similar. Cortas entonces la pizza en cinco rebanadas iguales – una para cada miembro de la familia. Finalmente, entra una familia de diez personas, ¡y ordena en la misma forma! ¿Cuál de las pizzas tendrá las rebanadas más grandes?

Cada una de las órdenes fue por una pizza de igual tamaño. La primera se dividió en cuatro partes iguales. La segunda en cinco partes iguales. Y la tercera en diez partes iguales. Cada miembro de la primera familia comió más pizza que los miembros de las otras dos familias. Cada rebanada de su pizza era más grande que las rebanadas de las otras pizzas. Si no lo crees, no te preocupes. Lo podemos demostrar con dibujos y con matemáticas.

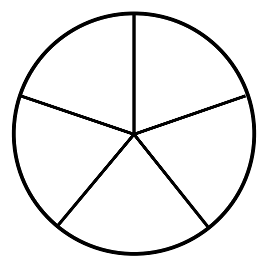
La pizza normalmente es redonda.
Este círculo representa una pizza completa.



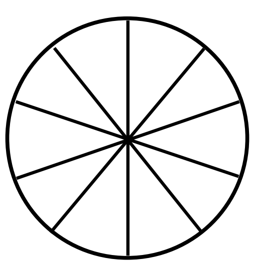
Ésta es la pizza de la familia de cuatro. Está dividida en cuatro partes iguales.



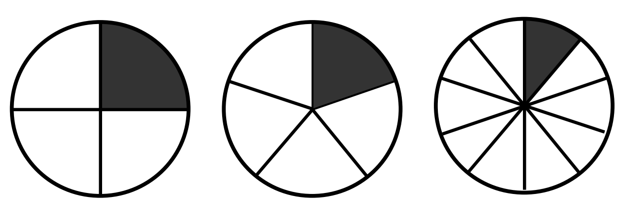
Ésta es la pizza de la familia de cinco. Está dividida en cinco partes iguales.



La pizza de la familia de diez está dividida en diez partes iguales.



La pregunta era qué familia iba a tener la rebanada más grande para cada uno de sus miembros. Compara los tamaños de las áreas sombreadas de cada pizza.



La pizza cortada en cuatro piezas tiene el área sombreada más grande. Eso significa que la familia de cuatro tuvo la rebanada más grande para cada uno de ellos.

El problema de la pizza se puede mostrar con matemáticas utilizando fracciones. Las fracciones comparan las partes contra el entero.

✓ Una fracción es el cociente de dos números, *a* y *b*. Una fracción se escribe como $\frac{a}{b}$, y quiere decir $a \div b$.

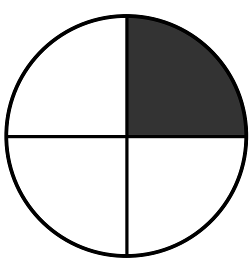
Cada una de las pizzas hechas para las tres diferentes familias se puede ilustrar utilizando **fracciones**.

HECHO

Las fracciones se usan más frecuentemente para representar partes de un entero. Escribiríamos esto como

$$\frac{\text{parte}}{\text{entero}}$$

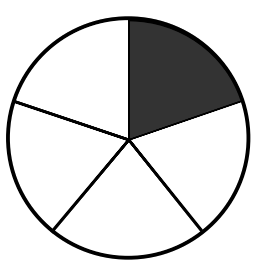
La pizza de la familia de cuatro se muestra a continuación.



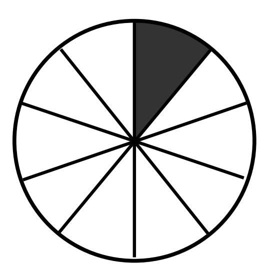
La pizza <u>entera</u> se compone de 4 rebanadas.
Una rebanada es 1 <u>parte</u> de la pizza entera.
Una rebanada es una de cuatro rebanadas.

La idea se puede ilustrar por la fracción $\frac{1}{4}$

Las pizzas de las otras familias se deben ver de la siguiente manera:



$= \frac{1}{5}$



$= \frac{1}{10}$

El área sombreada de cada dibujo corresponde a una rebanada de pizza. Es solo 1 porción de la pizza entera. La pizza entera está formada por el número total de rebanadas. La rebanada o porción será el numerador de una fracción. El número total de porciones, o el entero, será el denominador.

- ✓ El número de arriba en una fracción se llama numerador.
- ✓ El número de abajo en una fracción se llama denominador.

$$\frac{\textbf{numerador}}{\textbf{denominador}}$$

El denominador te indica el número total de partes en el entero. El numerador te indica cuántas de esas partes tienes.

Por ejemplo: $\frac{1}{2}$ significa una de dos partes, o un-medio;

$\frac{1}{3}$ significa una de tres partes, o un-tercio;

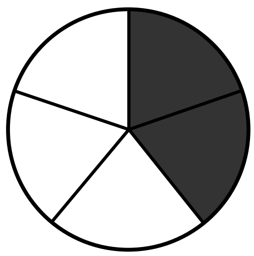
$\frac{1}{4}$ significa una de cuatro partes, o un-cuarto;

$\frac{1}{5}$ significa una de cinco partes, o un-quinto, y así sucesivamente.

El problema de la pizza se refería a una sola rebanada. ¿Qué pasa cuando se trata de varias rebanadas?

Ejemplo: Dos miembros de la familia de cinco deciden guardar sus rebanadas de pizza para después. ¿Qué fracción de la pizza entera se guardará para después?

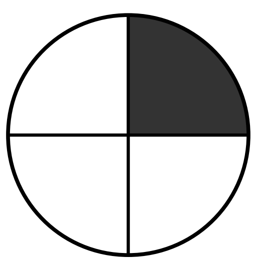
Solución: En este caso, hay cinco (5) rebanadas en total. Dos (2) de ellas se guardan. El denominador será 5 porque hay un total de cinco rebanadas. El numerador será 2 porque solo te interesa guardar 2 de las 5 rebanadas.



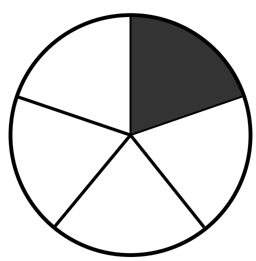
$$= \frac{2}{5}$$

Así, $\frac{2}{5}$ de la pizza se guardará para después.

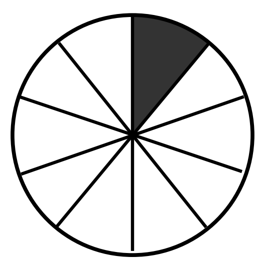
Ahora vuelve a ver el problema original de la pizza.



$\frac{1}{4}$



$\frac{1}{5}$



$\frac{1}{10}$

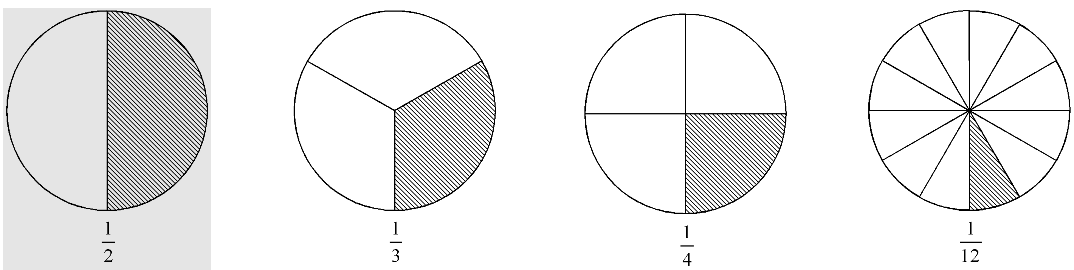
El área sombreada del círculo de la izquierda es la más grande. El área sombreada del círculo de la derecha es la más pequeña. Puedes comparar las áreas sombreadas utilizando fracciones. Obtendrás algo como lo siguiente:

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{10}$$

Puedes utilizar este método para comparar fracciones solamente si cada fracción es parte del mismo entero. En este caso, los círculos idénticos representaban una pizza entera.

Ejemplo*:* Compara el tamaño de las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, y $\frac{1}{12}$. Ponlas en orden, desde la más chica hasta la más grande.

Solución: Utilizaremos dibujos para ayudarnos a contestar esta pregunta.

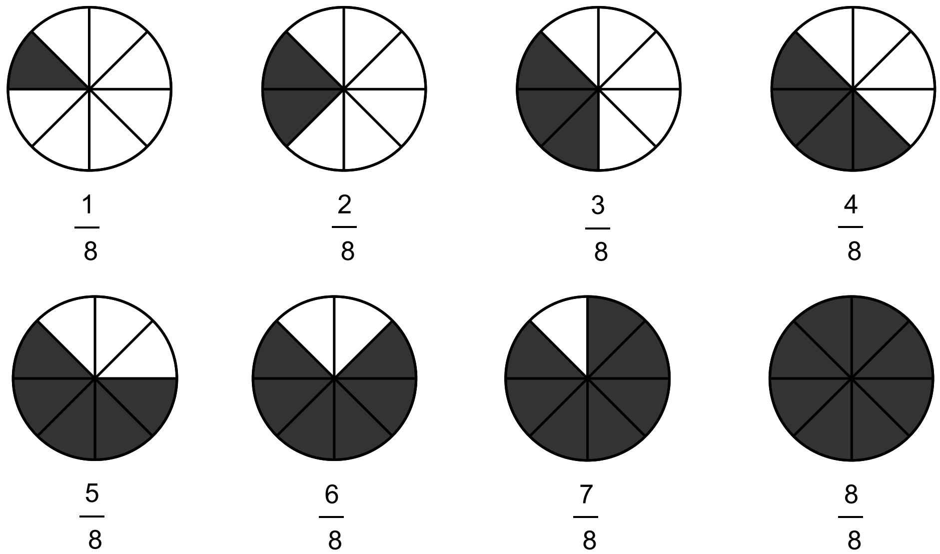


En las imágenes de arriba, el círculo del mismo tamaño representa un entero. Cada círculo se divide en partes del mismo tamaño. Podrás ver que más partes = partes más pequeñas. El orden de las fracciones, desde la menor (más chica) hasta la mayor (más grande), es

$$\frac{1}{12} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2}$$

✓ Si un conjunto de fracciones tiene el mismo numerador, la fracción con el denominador <u>más pequeño</u> será el de valor más grande.

¿Qué pasa si las fracciones tienen el mismo denominador, pero numeradores diferentes? Observa el ejemplo siguiente. ¿Qué es lo que notas?



Al crecer el numerador, crece también el valor de la fracción. ¿A qué se debe esto? Recuerda: El numerador te indica cuántas partes del entero tiene la fracción. La fracción $\frac{1}{5}$ indica que tú tienes una parte de un entero con cinco partes, o un-quinto. ¿Cómo comparas esto con la fracción $\frac{2}{5}$?

Aún estás manejando quintos, pero ahora tienes dos de ellos.

$\frac{2}{5}$ debe ser más grande que $\frac{1}{5}$.

Intenta resolver algunos problemas de fracciones tú solo.

¡Inténtalo!

1. Circula la fracción más grande.

a. $\frac{1}{11}$ o $\frac{1}{9}$ **b.** $\frac{6}{17}$ o $\frac{6}{15}$ **c.** $\frac{13}{19}$ o $\frac{11}{19}$

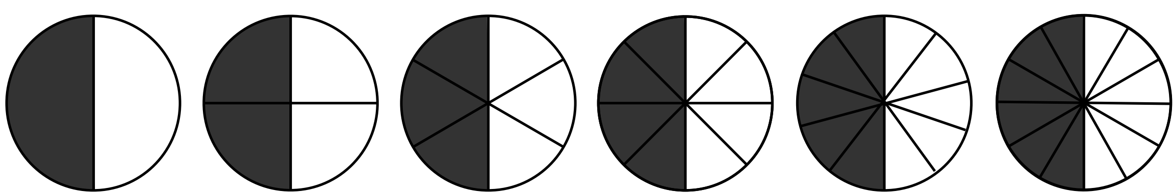
Comparar fracciones negativas y positivas funciona de la misma manera que comparar enteros negativos y positivos.

Por ejemplo, piensa en $-\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$. La primera fracción podría parecer más grande, porque su numerador es 2. Pero, $-\frac{2}{3}$ es un número negativo y menor que 0. Un-tercio ($\frac{1}{3}$) es un número positivo y más grande que 0.

$$-\frac{2}{3} < \mathbf{0} < \frac{1}{3}$$

Fracciones Equivalentes

En ocasiones, fracciones que se ven diferentes pueden ser iguales en valor. Observa la representación gráfica de estas fracciones.



$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{5}{10}$ $\frac{6}{12}$

Puedes notar que las partes sombreadas de cada círculo son todas iguales. Todas ellas representan la mitad del círculo. La única diferencia es el número de partes iguales que contiene cada círculo.

Puedes utilizar algebra para mostrar por qué todas estas fracciones son equivalentes – tienen igual valor. Una vez más, las versiones de igual valor de $\frac{1}{2}$ son $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$, y $\frac{6}{12}$.

¿Puedes ver el patrón que siguen estos números? Reescribamos las fracciones para mostrar más claramente por qué son iguales.

$$\frac{1}{2} = \frac{1\times 1}{2\times 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}\right)$$

$$\frac{2}{4} = \frac{1\times 2}{2\times 2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2}\right)$$

$$\frac{3}{6} = \frac{1\times 3}{2\times 3} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{3}\right)$$

$$\frac{4}{8} = \frac{1\times 4}{2\times 4} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{4}\right)$$

$$\frac{5}{10} = \frac{1\times 5}{2\times 5} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{5}\right)$$

$$\frac{6}{12} = \frac{1\times 6}{2\times 6} = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{6}\right)$$

HECHO

Cualquier número dividido entre sí mismo es igual a uno.

$\frac{5}{5} = 1$ *y* $\frac{z}{z} = 1$

HECHO

La propiedad de identidad de la multiplicación establece que cualquier número multiplicado por 1 da el mismo número. Esto te permite multiplicar cualquier fracción por 1 ¡sin cambiar su valor!

Cada forma igual a $\frac{1}{2}$ es solamente $\frac{1}{2}$ multiplicado por algo igual a uno!

Cada fracción de arriba se puede escribir como $\frac{1}{2}\times 1$. La propiedad de identidad nos dice que $\frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$. Así, cada fracción de arriba es igual a $\frac{1}{2}$.

Puedes utilizar la propiedad de identidad para encontrar fracciones equivalentes para *cualquier* fracción.

Ejemplo: Escribe dos fracciones que sean equivalentes a $\frac{1}{3}$.

Solución: Si multiplicas tanto el numerador como el denominador por 2, verás que

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$$

O puedes multiplicar tanto el numerador como el denominador por 3 y obtener

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \times 3}{3 \times 3} = \frac{3}{9}$$

Así, $\frac{2}{6}$ y $\frac{3}{9}$ son equivalentes a $\frac{1}{3}$.

¡Inténtalo!

2. Escribe dos fracciones que sean equivalentes a:

a. $\frac{3}{5}$

b. $\frac{2}{3}$

3. Completa la fracción equivalente.

a. $\frac{3}{5} = \frac{12}{\square}$

b. $\frac{16}{24} = \frac{\square}{12}$

Las fracciones equivalentes pueden ser útiles. Te pueden ayudar a reescribir fracciones utilizando números más pequeños.

Por ejemplo, $\frac{30}{45}$ es una fracción con números grandes. Puedes simplificarlo utilizando fracciones equivalentes y factores comunes.

✓ Una fracción está en su forma más simple o en sus términos menores, si el numerador y el denominador no comparten factores comunes. Así, la fracción no tiene formas equivalentes con números más pequeños.

La forma más simple y términos más bajos significan la misma cosa. "Simplificar" significa poner algo en su mínima expresión.

Por ejemplo, $\frac{6}{9}$ no está en su expresión más simple.

El numerador y el denominador comparten un factor común de 3.

$\frac{6}{9} = \frac{6 \div 3}{9 \div 3} = \frac{2}{3}$ Ahora si está en su mínima expresión.

Regla

Para poner una fracción en su mínima expresión:

1. Encuentra el Factor Común Más Grande del numerador y del denominador.

2. Divide el numerador y el denominador entre ese factor.

Recuerda: Si el numerador y el denominador de una fracción no comparten factores, se encuentran ya en su mínima expresión. Si esto sucede, el FCMG de su numerador y de su denominador será 1.

Ejemplo: Escribe $\frac{30}{45}$ en su mínima expresión.

Solución:

Pasos 1 & 2: Escribe los factores del numerador y del denominador. Subraya, circula, o resalta los factores que tienen en común.

Factores de 30: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

Factores de 45: 1, 3, 5, 9, 15, 45

Paso 3: Puedes ver que quince es el factor común más grande.

Paso 4: Divide el numerador y el denominador entre el FCMG.

$$\frac{30}{45} = \frac{30 \div 15}{45 \div 15} = \frac{2}{3}$$

¡Inténtalo!

4. Escribe las siguientes fracciones en su mínima expresión.

a. $\frac{4}{12}$ **b.** $\frac{6}{15}$ **c.** $\frac{4}{5}$

Puedes utilizar el método de productos cruzados para verificar si las fracciones son equivalentes.

Método de Productos Cruzados

- ✓ Multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción.
- ✓ Luego, multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción.
- ✓ Si estos dos productos son iguales, las fracciones son equivalentes.

Si $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$, luego $(1 \times 4) = (2 \times 2)$. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, luego $(a \times d) = (b \times c)$.

Se llama el método de productos cruzados porque multiplicas <u>en cruz</u> sobre el signo de igual como se muestra a continuación.

Ejemplo: Demuestra que $\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$ utilizando el método de productos cruzados.

***Solución*:** Escribe la ecuación de fracciones.

Multiplica 1 x 12 y luego, 4 x 3, como se muestra.

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{12}$$

$$(1 \times 12) = (3 \times 4)$$

$$12 = 12 \quad \checkmark$$

Los productos cruzados son iguales.

Las fracciones son equivalentes.

¡Inténtalo!

5. ¿Qué fracción *<u>no</u>* es equivalente a $\frac{2}{3}$? (Circula la respuesta correcta).

a. $\frac{2}{4}$ **b.** $\frac{6}{9}$ **c.** $\frac{4}{6}$ **d.** $\frac{20}{30}$

6. Decide si cada fracción esta a su mínima expresión o no. Simplifica cualquier fracción que no lo esté.

a. $\frac{8}{16}$ **b.** $\frac{12}{18}$ **c.** $\frac{9}{10}$ **d.** $\frac{13}{64}$

Números Mixtos

Las fracciones representan partes de números enteros. Frecuentemente se combinan con números enteros en la vida real. Un número entero más una fracción se denomina como **número mixto**.

- ✓ Un número mixto es la suma de un número entero y una fracción. Cuando se escribe, el signo de más todavía está ahí, aunque no se vea.

$$3 + \frac{2}{3} = 3\frac{2}{3}, \text{ y } A + \frac{b}{c} = A\frac{b}{c}.$$

Por ejemplo: Un recolector de uvas pizca suficientes uvas para llenar tres grandes barriles y $\frac{2}{3}$ de un cuarto barril. Esto se puede mostrar en el modelo que sigue.

$$1 + 1 + 1 + \frac{2}{3}$$

Puedes notar que $1+1+1+\frac{2}{3} = 3+\frac{2}{3}$.

$$3 + \frac{2}{3} = 3\frac{2}{3}$$

Los números mixtos no son números enteros. Ellos se encuentran entre dos números enteros. En el ejemplo de arriba, el recolector de uvas llenó tres barriles de uvas más una parte de otro barril. Así, el número mixto $3\frac{2}{3}$ se encuentra entre los números enteros 3 y 4.

Existe una forma específica de expresar los números mixtos. Expresas $3\frac{2}{3}$ como "tres y dos-tercios". El número mixto, $5\frac{3}{4}$, se dice como, "cinco y tres-cuartos". Nota que: la palabra "y" se coloca entre el número entero y la fracción.

Los números mixtos se pueden descomponer en fracciones.

Utiliza la definición y trabaja hacia atrás.	$3\frac{2}{3} = 3 + \frac{2}{3}$
Ahora, descompón el 3.	$= 1 + 1 + 1 + \frac{2}{3}$
Sustituye la fracción equivalente por cada 1 – (tres-tercios).	$= \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{2}{3}$
Puedes sumar los numeradores porque los denominadores son iguales	$= \frac{9}{3} + \frac{2}{3}$
	$= \frac{11}{3}$

✓ Si el numerador de una fracción es menor que su denominador, se llama una ***fracción propia***. Si el numerador de una fracción es más grande que o igual a su denominador, se llama una ***fracción impropia***.

Por ejemplo $\frac{13}{3}$ es una fracción impropia, porque la porción de arriba, 13, es más grande que la de abajo, 3. La fracción $\frac{7}{18}$ es una fracción propia, ya que 7 es más pequeño que 18.

Los números mixtos y los números enteros siempre se pueden mostrar como fracciones impropias.

Cuando $3\frac{2}{3}$ se convirtió en una fracción impropia, notaste que $3\frac{2}{3}$ realmente quería decir “tres enteros y dos tercios”. Luego, tres enteros se cambió a su equivalente nueve-tercios. Finalmente, nueve-tercios se combinaron con dos-tercios para obtener la respuesta, $3\frac{2}{3} = \frac{11}{3}$.

Este método se puede utilizar para convertir cualquier número mixto en una fracción impropia.

Regla Para convertir un número mixto en una fracción impropia:

1. Multiplica el número entero por el denominador de la fracción.
2. Suma este producto al numerador de la fracción.
3. Expresa la fracción en su mínima expresión.

$$5\frac{3}{4} = 5\frac{3}{4} = \frac{(5 \times 4) + 3}{4} = \frac{23}{4}$$

¡Inténtalo!

7. Escribe los números mixtos como fracciones impropias.

a. $1\frac{1}{3}$ **b.** $2\frac{7}{8}$ **c.** $3\frac{3}{4}$ **d.** $5\frac{3}{5}$

¿Qué pasa si tienes una fracción impropia y deseas convertirla en un número mixto?

Ejemplo: Escribe $\frac{9}{4}$ como un número mixto.

Solución: En este ejemplo, estás trabajando con cuartos. Ya sabes que hay cuatro cuartos en un entero, porque $\frac{4}{4}=1$.

> *Recuerda*
>
> *Las fracciones significan división.*
>
> $\frac{9}{4} = 9 \div 4$

El numerador de la fracción te indica cuántas partes tienes. En este caso existen nueve partes de cuartos. Lo que necesitas saber es cuántos grupos de cuatro hay en un nueve. Para averiguarlo, divide nueve entre cuatro.

$$\begin{array}{r} 2 \;\; R1 \\ 4\overline{)9} \\ \underline{8} \\ 1 \end{array}$$

Hay dos enteros y un cuarto sobrante. La respuesta es $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$.

Puedes utilizar este método para convertir cualquier fracción impropia en un número mixto.

Regla

Para convertir una fracción impropia en un número mixto:

1. Divide el numerador de la fracción entre su denominador.
2. El número de veces que cabe el denominador en el numerador será la parte "entera" del número mixto.
3. A la derecha de ese entero, escribe la fracción. El numerador erá el <u>remanente</u> encontrado en el paso 2. El denominador será el mismo de la fracción original.

$$\frac{9}{2}$$
$$= 9 \div 2$$
$$= 4\,R\,1$$
$$= 4\frac{1}{2}$$

Ejemplo: Escribe $\frac{14}{3}$ como un número mixto

Solución:

Primero escribe $\frac{14}{3}$ como un problema de división. $3\overline{)14}$

Encuentra el cociente con su remanente.

$$\begin{array}{r} 4 \;\; R\,2 \\ 3\overline{)14} \\ -12 \\ \hline 2 \end{array}$$

El 4 se queda a la izquierda como el número entero.

El 2 se convierte en el numerador de la fracción.

El 3 se convierte en el denominador de la fracción.

$$4\frac{2}{3}$$

¡Inténtalo!

8. Escribe las fracciones impropias como números mixtos en su mínima expresión.

a. $\frac{5}{3}$

b. $\frac{21}{8}$

c. $\frac{5}{4}$

d. $\frac{11}{5}$

Fin de la Lección 5

Lección 6

Decimales

Vocabulario:

- √ **decimal**
- √ **decimal finito**
- √ **decimal infinito**
- √ **redondeo**

Un **decimal** puede representar un número entero o la parte fraccionada de un número. Veamos de cerca los decimales.

El precio de los plátanos en la tienda de abarrotes de tu localidad es de diez plátanos por un dólar. Puedes mostrar el precio utilizando una fracción. Una pieza cuesta $1 \div 10 = \frac{1}{10}$ de dólar.

Sabes que un décimo de dólar es un dime, o \$0.10. Así tenemos que, $\frac{1}{10} = .10$

Otra manera de representar fracciones – 0.10 es un ejemplo de decimal.

✓ Un decimal es un número que puede representar un entero o una fracción. Un punto (.) separa la parte entera de la parte fraccional. Se conoce como punto decimal. Por ejemplo, 3.5 es número decimal como le es 0.72

Una forma de entender bien los decimales es pensar en ellos como si fueran dinero. El primer número a la derecha del punto decimal está en el lugar de los décimos. Si fuese dinero, un dime es $0.10, o un-décimo de dólar. El segundo número a la derecha del punto decimal está en el lugar de los centésimos. Si fuese dinero, este número te indica el número de centavos o pennies que tienes. Un penny es 1 un-centésimo ($\frac{1}{100}$) de dólar. O, 100 pennies es igual a un dólar. El diagrama siguiente te muestra los lugares de los enteros y de los decimales. Los números a la izquierda del punto decimal son números enteros. Los números a la derecha del punto decimal son fracciones.

___	___	___ ,	___	___	___	●	___	___	___	___	___	___
cien miles	**diez miles**	**miles**	**centenas**	**decenas**	**unidades**	**punto decimal**	**décimas**	**centésimas**	**milésimas**	**diezmilésimas**	**cienmilésimas**	**millonésimas**

Ejemplo: Indica el valor de cada dígito del número 0.123450

Solución: 1 está en el lugar de las décimas. 2 está en el lugar de las centésimas. 3 está en el lugar de las milésimas. 4 está en el lugar de las diezmilésimas. 5 está en el lugar de las cienmilésimas. El cero está en el lugar de las millonésimas.

También puedes indicar que hay 1 décima, 2 centésimas, 3 milésimas, 4 diezmilésimas, 5 cienmilésimas, y cero millonésimas.

¡Inténtalo!

1. Escribe cada dígito en el valor correcto en la tabla siguiente. Luego escribe el valor del dígito del extremo derecho.

a. 3.1 ____

b. 2.03 ____

c. 8.463 ____

d. 7.1464 ____

e. 13.00001 ____

	Decenas	Unidades		Décimas	Centésimas	Milésimas	Diezmilésimas	Cienmilésimas
a.			•					
b.			•					
c.			•					
d.			•					
e.			•					

¿Cómo escribes y nombras el decimal entero?

Ejemplo: Escribe 3.413 en palabras.

Solución: Ésta es una combinación de números enteros y una parte fraccionada. Si cuentas el número de decimales, podrás ver que este número se extiende hasta las milésimas. Y se lee de esta forma:
3.413 = tres punto cuatrocientos trece milésimas

- ✓ El número entero se dice como se dice normalmente.
- ✓ "Punto" significa que ahí va un punto decimal.
- ✓ Los números que van después de "punto" se leen como una fracción. El número de lugares ocupados a la derecha del punto te dice el valor, el cual será el denominador. En el ejemplo, son las milésimas.

Los decimales se leen en la forma en que se leen los números mixtos. Sin dificultad, los decimales se pueden escribir como números mixtos.

$$3.413 = 3\frac{413}{1000}$$

Una vez más, el número se lee como tres punto cuatrocientos trece milésimas. Utilizando números mixtos, ¡puedes convertir los decimales a fracciones impropias!

$$3\frac{413}{1000} = \frac{3000}{1000} + \frac{413}{1000} = \frac{3413}{1000}, \qquad \text{entonces} \qquad 3\frac{413}{1000} = \frac{3413}{1000}.$$

Regla

Para escribir un número con decimales en palabras:

1. Escribe el número a la izquierda del punto decimal como escribirías cualquier número entero.
2. En el lugar del punto decimal, escribe la palabra “punto”.
3. Escribe el número a la derecha del punto decimal, como escribirías cualquier número entero.
4. Al final, escribe el valor del lugar del dígito final. Debe terminar en “ésimas”. (décimas, centésimas, milésimas, …

Regla

Para escribir un número con decimales como número mixto:

1. Reescribe todos los dígitos a la izquierda del punto decimal. Ésta es la parte entera del número.
2. Escribe todos los dígitos a la derecha del punto decimal como el numerador de una fracción.
3. En el denominador, escribe el valor del lugar del último dígito de la derecha. (10, 100, 1000, 10000, 100000, …)

   Por ejemplo, $17.927 = 17\frac{927}{1000}$

¡Inténtalo!

2. Escribe cada decimal con palabras, luego como un número mixto, luego como una fracción en su última expresión.

a. 2.6

Palabras: ____

Número Mixto:

Fracción:

b. .43

Palabras: ____

Número Mixto:

Fracción:

c. 1.6524

Palabras: ____

Número Mixto:

Fracción:

Considera dos números enteros, 340 y 00340. Lo creas o no, 340 = 00340. El número 00340 se ve raro. Normalmente los números no se escriben de esta manera. Los primeros dos ceros antes del 3 no tienen significado. Sin embargo, el cero después del 4 si es necesario. Si quitas el cero al final del 340, cambiará el valor del número.

Se pueden hacer cosas similares con los decimales. Todos los siguientes decimales son iguales.

0.43
= 0.430
= 0.4300
= 0.43000
= 0.430000
= 0.43000000000000000000

Todos tienen el mismo valor porque el valor del lugar del 4 y del 3 nunca cambia.

> **HECHO**
>
> *Se puede agregar cualquier número de ceros al final de un número decimal sin cambiar el valor del mismo.*

¡Inténtalo!

3. Verdadero/Falso. Decide si cada ecuación siguiente es verdadera o falsa. Escribe una “V” o una “F” en las líneas a la izquierda de las ecuaciones.

a. ____ 07 = 7

b. ____ 4 = 40

c. ____ 00030 = 00300

d. ____ 3.4 = 03.4

e. ____ 8.42300 = 8.423

f. ____ 900.163200 = 0900.1632

Saber esto nos ayuda a poner los decimales según su orden.

Ejemplo: ¿Cuál es más grande, 0.2, o 0.19?

Solución: Podrías pensar que el 0.19 es más grande que el 0.2, ya que $19 > 2$.
Pero primero piensa en lo siguiente.

Sabes que 0.2 = 0.20.
En términos monetarios, sabes también que $0.20 es más que $0.19.
Por lo tanto, 0.2 > 0.19.

¿Y qué sucede con los siguientes dos números decimales?

Ejemplo: ¿Cuál es más grande, 0.2 o 0.199999999999999999?

Solución: Alinea ambos números según su valor posicional.
0.2
0.199999999999999999

Nota que el número de arriba tiene 2 décimas, y el de abajo tiene solo 1 décima más algo que es menor que una décima, así,
0.2 > 0.19999999999999.

Los decimales son muy útiles cuando se compara el tamaño de dos números. Por esta razón se usan más en términos monetarios que en fracciones. Lo que has visto aquí te ayudará a utilizar el siguiente método para comparar el tamaño de dos decimales.

Regla

Para comparar el tamaño de los decimales:

1. Alinea los dos decimales según el valor posicional. Una manera fácil de hacer esto es alinear los puntos decimales uno abajo del otro.
2. Compara el valor posicional hasta encontrar una diferencia. Empieza con la parte entera de los números. Si son los mismos, verifica las décimas de cada uno. Si son las mismas, verifica las centésimas, luego sigue con las milésimas, etc. Continúa verificando hasta que encuentres un lugar donde los dígitos sean diferentes.
3. Determina cuál es más grande. En el lugar donde encuentres la diferencia, el dígito **más grande** te indica qué número es más grande.

Ejemplo: Compara 1.1324549 y 1.1324639

Solución

Paso 1: A linea los dos números en sus puntos decimales.

1.1324549
1.1324639

Paso 2: Compara el valor posicional de cada uno hasta que encuentres una diferencia. Circula la diferencia. Nota que está en el lugar de las cienmilésimas.

Paso 3: Determina cuál es más grande. Circulaste los dígitos 6 y 5. $6 > 5$, de esta forma $1.1324639 > 1.1324549$.

¡Inténtalo!

4. Compara los siguientes decimales utilizando < , > , o =.

a. 12 y .13

b. 102 y .13

c. 1,35 y 0.999

d. 16.82736 y 16.82747

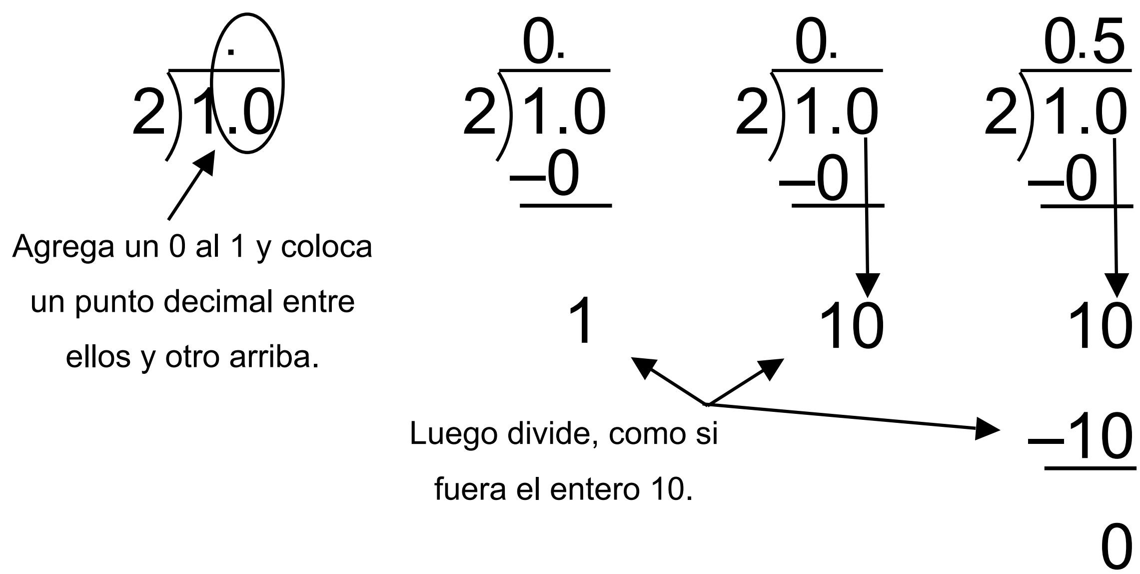
Decimales Finitos e Infinitos

Los decimales se crean al desarrollar divisiones en fracciones. El denominador de una fracción divide al numerador. El resultado será un decimal.

Por ejemplo, observa la fracción, $\frac{1}{2}$. Cuando haces la división, se convierte en el decimal 0.5.

$$1 \div 2$$

$$\frac{1}{2} = \qquad = 2\overline{)1}$$



Ejemplo: Escribe $\frac{5}{8}$ como número decimal.

Solución: $\frac{5}{8} = 5 \div 8$

$$8\overline{)5}$$

$$\begin{array}{r} \mathbf{0.} \\ 8\overline{)\mathbf{5.0}} \\ -\underline{\mathbf{0}} \\ \mathbf{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \mathbf{0.} \\ \overline{)\mathbf{5.0}} \\ -\underline{\mathbf{0}} \\ \mathbf{50} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.6 \\ 8\overline{)5.0} \\ -\underline{0} \\ 50 \\ -\underline{48} \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.6 \\ 8\overline{)5.00} \\ -\underline{0} \\ 50 \\ -\underline{48} \\ 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.625 \\ 8\overline{)5.000} \\ -\underline{0} \\ 50 \\ \underline{48} \\ 20 \\ \underline{16} \\ -\ 40 \\ \underline{40} \\ -\ 0 \end{array}$$

Si hay un residuo, crea un número decimal y sigue agregando ceros al dividendo hasta que no haya residuo.

En ambos ejemplos de arriba, los decimales resultantes tuvieron un final. Los decimales que tienen una terminación se llaman **decimales finitos**. No todos los decimales tienen terminación. No todos ellos tienen un fin.

Ejemplo: Un letrero en una tienda dice "*Marcadores: 3 por $1.00 o 1 por $ 0.35*".
¿Cuál de esos precios te conviene más?

Solución: Tienes que imaginarte cuánto cuesta un marcador con cada una de esas opciones y comparar los precios. En la primera opción, se ofrecen 3 marcadores por un dólar. El precio de un marcador se puede escribir como $\frac{1}{3}$ de dólar. ¿Cuánto significa esto? Recuerda: Fracciones significan división.

$$\frac{1}{3} = 1 \div 3 \quad = 3\overline{)1.0000}^{\,0.3333}$$

$$\begin{array}{l} \underline{.9} \\ .10 \\ \underline{.09} \\ .010 \\ \underline{.009} \\ .0001 \end{array}$$

No importa cuánto tiempo te lleves dividiendo, este número decimal nunca terminará. ¡Seguirás agregando otro 3 eternamente! Un decimal que nunca termina es llamado **decimal infinito**.

Para mostrar que un decimal es infinito escribe una raya sobre la parte que se repite. En el ejemplo de arriba, 0.33333333333333… se escribe como $0.\overline{3}$. Como estás manejando dinero, necesitas redondear este decimal al lugar de las centésimas (el redondeo se explicará en esta lección más adelante).

0.3333333. . . o $0.\overline{3}$ se redondea a 0.33.

De esta forma, un marcador en la primera opción costar $0.33. Es realmente más barato que el precio de $0.35 de la otra opción.

Otro ejemplo de un decimal infinito es 0.6437121212121212121212…

Se escribe como $0.6437\overline{12}$. Nota que la raya solo se extiende sobre los números que se repiten. Eso hace que la parte decimal sea más fácil de leer.

- ✓ Un decimal que termina se llama **decimal finito**.
  Por ejemplo, 0.173 y 33.2 son decimales finitos.
- ✓ Un **decimal infinito** es un decimal que tiene un número infinito de dígitos.
  Los dígitos continuarán siguiendo un patrón establecido.
  Por ejemplo, $0.3333333... = .\overline{3}$ y $0.473473473473473... = .\overline{473}$
  son decimales infinitos.

Cualquier fracción ¡puede convertirse ya sea en un decimal finito o en un decimal infinito!

Ejemplo: Escribe $\frac{4}{5}$ como decimal.

Solución Utiliza la división larga.

$$
\begin{array}{r}
0.8 \\
5\overline{)\ 4.0} \\
\underline{-4.0} \\
0
\end{array}
\qquad \frac{4}{5} = 0.8 \text{, un decimal finito.}
$$

Ejemplo: Un letrero en la tienda dice “***Toallas de papel, 11 rollos por $3.00***”. ¿Cuánto costará un rollo de toallas de papel?

Solución: Debes dividir 3.00 entre 11 unidades iguales.

$$
\mathbf{3 \div 11 =} \quad
\begin{array}{r}
0.27272...\\
11\overline{)3.00000...}\\
-\underline{2.2}\\
80\\
-\underline{77}\\
30\\
-\underline{22}\\
80\\
-\underline{77}
\end{array}
$$

Tan pronto como veas el mismo remanente dos veces, sabes ya que ese decimal es un decimal infinito. Puedes dejar de dividir en este punto.

La respuesta: $3 \div 11 = .\overline{27}$

Redondeo

En el ejemplo anterior, encontraste que un rollo de toallas de papel cuesta $\$0.\overline{27}$. Un decimal infinito es aceptable en matemáticas. Pero no funciona en términos monetarios. Las tiendas no pueden cobrar $0.272727272727. . . por un artículo. Si $0.27 es igual a 27 centavos, ¿cuántos centavos serían $0.27272727? Los centavos son la fracción más pequeña de un dólar. No existen las fracciones de centavo.

Cuándo manejas dinero, los decimales infinitos se redondean a la centésima más cercana o centavo. Una centésima de dólar = centavo = un penny. En el caso de las toallas de papel, $0.27272727 se redondea a $0.27. Así, el costo de un rollo de toallas de papel es de $0.27.

Regla

Para redondear un número a un valor de posición dado.

1. Fíjate en el número que sigue a la derecha del lugar al que tienes que redondear.
2. Compara ese número el 5.
   - **a.** Si el número es menor a 5, redondea hacía abajo y deja igual el valor posicional dado.
   - **b.** Si el número es mayor o igual a 5, redondea hacia arriba e incrementa en 1 el número que está en el valor posicional dado.
   - **c.** Si el número posicional es un 9, pon un 0 en el lugar del 9 e incrementa en 1 el número a la izquierda de nuestro valor posicional dado.
   - **d.** En las ecuaciones, los resultados redondeados requieren de un signo especial. Usa **≈**, no = en la ecuación.

Redondea 1.895 a la centésima más cercana.

1.895

5 = 5

Redondea hacia arriba

1.895 se redondea a 1.90

Ejemplo: Redondea 173.9378429329 a la <u>décima</u> más cercana.

Solución

Paso 1: Fíjate en el número a la derecha del lugar de las décimas.

173.9**<u>3</u>**76429329

Paso 2: Compara el número 3 con el 5. Nota que $3 < 5$, así que tienes que redondear hacia <u>abajo</u>. Deja el número de las décimas como está. La respuesta es 173.9.

¡Inténtalo!

Convierte las siguientes fracciones a decimales. Los decimales pueden ser finitos o infinitos.

5. $\frac{9}{11}$

6. $\frac{11}{8}$

7. $\frac{5}{6}$

Convierte las siguientes fracciones a decimales. Los decimales pueden ser finitos o infinitos. Luego, redondea cada decimal a la centésima más cercana.

8. $\frac{3}{8}$

9. $\frac{2}{3}$

10. $\frac{5}{11}$

11. Escribe el decimal con palabras, luego como un número mixto, luego como una fracción impropia en su mínima expresión. 4756.5

12. Utiliza un signo de desigualdad (> o <) para comparar cada par de decimales.

a. 3.425 ____ 6.425 **b.** 1.089 ____ 1.1

c. 0.001 ____ 0.01 **d.** 142.284756 ____ 142.284755

13. Redondea cada decimal a la <u>centésima</u> más cercana.

a. 7.43232 **b.** 14.267239 **c.** 9.473

d. 1.1111111111 **e.** 0.9877654 **f.** 13.8

14. Escribe los siguientes decimales de tal forma que sus valores posicionales queden alineadas. 24971894781.34 y 32.823743239

15. Escribe la cantidad como la parte decimal de un dólar. (Pista: piensa a cuantos <u>centavos</u> equivale cada uno).

a. 1 quarter **b.** 4 nickels **c.** 89 pennies **d.** 14 dimes

$ _____ $ _____ $ _____ $ _____

Fin de la Lección 6

Lección 7

Porcentajes

Vocabulario:

√ **porcentaje**

Un **porcentaje** es la comparación de cualquier número contra 100. Veamos de cerca los porcentajes.

Te encuentras en la caja de la tienda. Estás comprando un paquete de 3 marcadores por $1 y un paquete de chicle por $0.32. El total es de $1.32. De repente notas un anuncio que dice, "*8% impuesto por venta*". ¿Qué significa esto? ¿Cuánto vas a pagar?

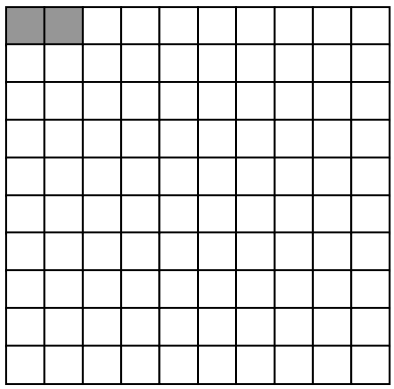
Empieza con 8%. 8% se lee como "ocho por ciento".

✓ Un porcentaje es una comparación de cualquier número contra 100. El símbolo % quiere decir $\frac{1}{100}$.

Los porcentajes pueden cambiarse tanto a fracciones como a decimales.

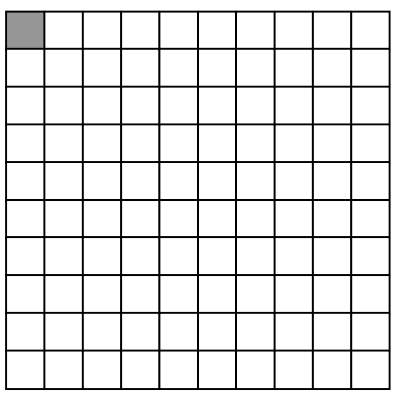
Por ejemplo, 3% significa $\frac{3}{100}$, o 0.03.

Piensa en lo que esto significa. Los porcentajes comparan todo contra 100. El modelo de abajo es igual a 100. Ha sido dividido en 100 cuadros de igual tamaño. ¿Cómo mostrarías 2?



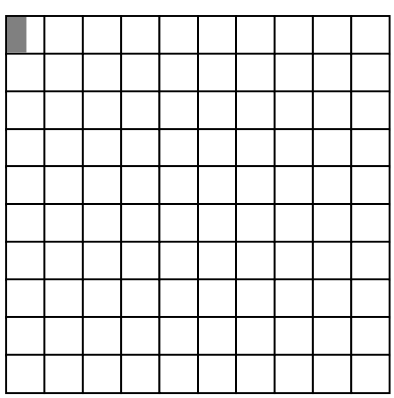
Si 100 cuadros representan 100, cada cuadro vale 1. Para mostrar 2, sombrea dos cuadros. Los cuadros sombreados son 2 de 100. 2 comparado con 100 es igual a 2%. O, 2 es 2% de 100. Los dos cuadros sombreados representan 2% del modelo.

¿Y si el mismo modelo de 100 cuadros es igual a <u>200</u>? ¿Cómo mostrarías 2?



Ahora, el modelo es igual a 200. Cada uno de sus 100 cuadritos vale 2. (100 x 2 = 200). Para poder mostrar 2, solamente necesitas sombrear un cuadro. 1 cuadro de 100 significa 1 comparado contra 100, o 1%. El valor de cada cuadro es 2.
Así, 2 es 1% de 200.

El modelo siguiente todavía es igual a 200. Esta vez, muestra el valor de 1.



Cada cuadrito vale 2. Uno es la mitad de 2. Esto se muestra sombreando la mitad de un cuadrito. Una mitad comparado contra 100 es igual a 0.5%. Así, 1 es 0.5% de 200.

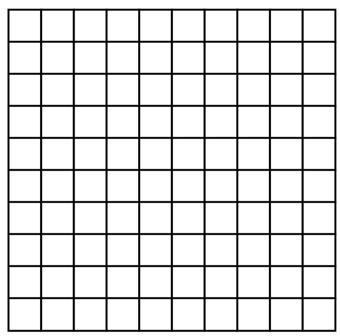
¡Inténtalo!

Por cada pregunta que sigue:

- ✓ Anota el valor del modelo entero.
- ✓ Establece cuánto vale cada cuadrito.
- ✓ Sombrea el valor que se pide con base en el modelo.
- ✓ Determina el porcentaje que representa.

1. El entero es 100, así, cada cuadrito vale _______________.

Ahora, sombrea 37.

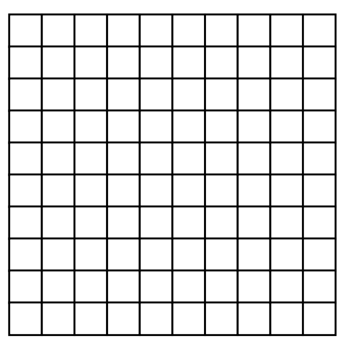


Porcentaje de 37 contra 100:

____

2. El entero es 200, así, cada cuadrito vale ________________.

Ahora, sombrea 75.

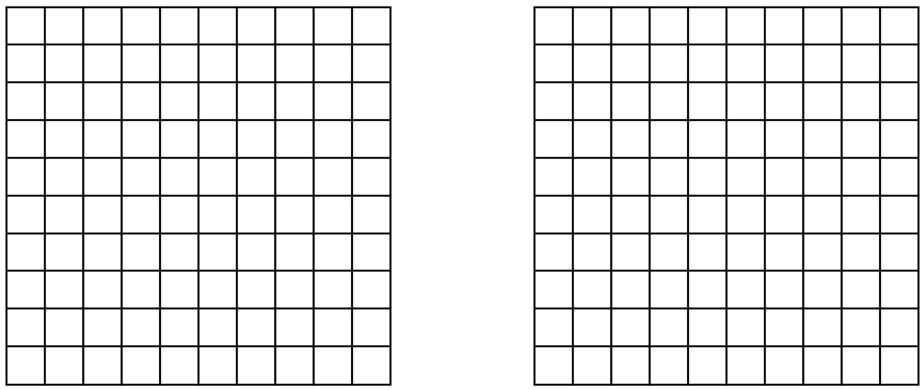


Porcentaje de 75 contra 200:

____

3. Cada entero representa 50. El valor de un cuadrito es ________________.
Ahora sombrea 60.

(*Pista:* Hay dos enteros porque 60 es más grande que 50).

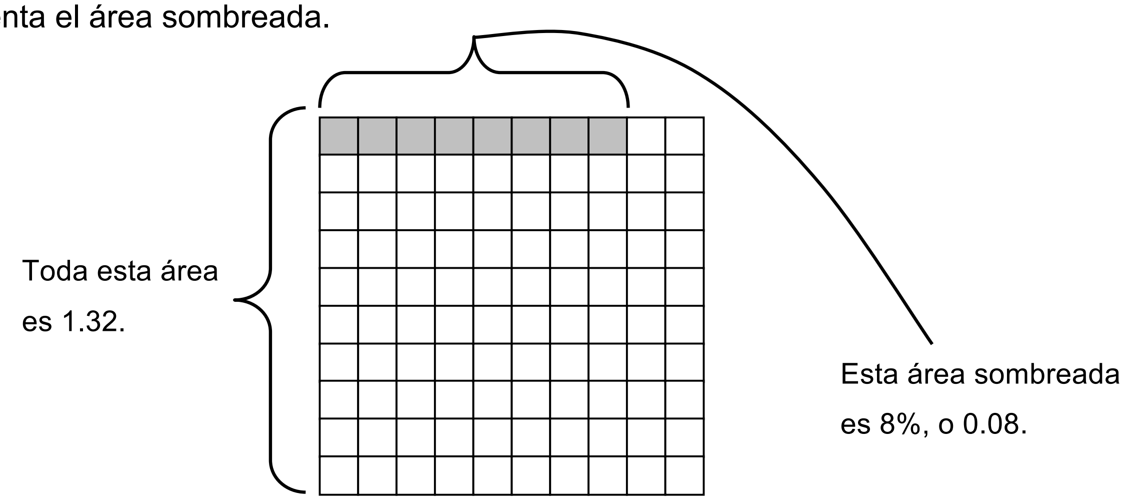


El porcentaje de 60 contra 50:__________________

Ahora ya puedes visualizar el problema del impuesto sobre la venta del principio de esta lección. Existe un 8% de impuesto sobre la venta sobre la compra de marcadores y chicle por la cantidad de $1.32.

8% significa realmente $\frac{8}{100}$ or $.08$. Así el impuesto es 0.08 de 1.32.

El modelo siguiente representa el entero – 1.32. Quieres saber cuánto representa el área sombreada.



Los ocho cuadros sombreados representan el impuesto a los artículos, o 0.08 de 1.32.

HECHO

La palabra "de" implica multiplicación. Por ejemplo, la mitad de cuatro significa $\frac{1}{2} \times 4$. *Así, 0.08 de1.32 = 0 .08 x 1.32.*

Sigue los siguientes pasos para multiplicar decimales.

(1.) Cuenta el número de decimales en cada factor y súmalos.

$$\underset{2}{.08} \times \underset{2}{1.32}$$

2 + 2 = 4 decimales

(2.) Multiplica como si multiplicaras números enteros.

$$\begin{array}{r} 132 \\ \times \quad 8 \\ \hline 1056 \end{array}$$

(3.) Corre el punto decimal varios lugares en el resultado contando a partir del dígito más lejano a la derecha. Utiliza el número (4) que encontraste en el Paso 1.

1 0 5 6 = **.**1056

4 3 2 1
(decimales)

8% de $1.32, es entonces, $0.1056. Como estás manejando dinero, debes redondear al centavo o centésimo más cercano. Redondeado al centavo más cercano, el impuesto a la venta es igual a $0.11.

Encuentra el costo total de tu compra. Suma el costo de los artículos más los impuestos a la venta.

1.32 + .11 = 1.43

Costo total de la compra = $1.43

Cuando calculas la cantidad correspondiente a los impuestos a la venta de una compra, estás tomando el porcentaje de un número. Esto significa multiplicar el número por un porcentaje.

Regla

Para encontrar el porcentaje de un número:

1. Cambia el porcentaje a decimales. Mueve el punto decimal dos lugares a la izquierda.	Encuentra el 13% de 75. 13% = 0.13
2. Multiplica el decimal por el número.	75 x 0.13 = 9.75

Ejemplo: ¿Cuál es el 15% de 13?

Solución

Paso 1: 15% = 15 ÷ 100 = 0.15

Paso 2: 0.15 x 13

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\ 13 \\ \hline 45 \\ +\ 150 \\ \hline 195 \end{array}$$

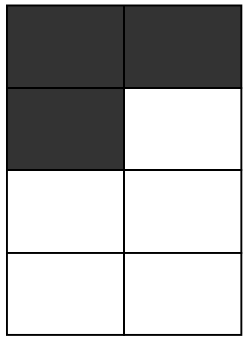
1.95

En ocasiones, se te dan dos números y se te pide encontrar el porcentaje.

Ejemplo: ¿Qué porcentaje de 8 es 3?

Solución: Deseas saber qué porcentaje representa el 3 del número 8.

Esto es 3 de 8.



$$\frac{3}{8}$$

En decimales, esto será

$$\begin{array}{r} .375 \\ 8\overline{)\ 3.000} \\ \underline{-2.4} \\ 60 \\ \underline{-\ 56} \\ 40 \\ \underline{-\ 40} \\ 0 \end{array}$$

Ahora, necesitas convertir el número decimal a un porcentaje.

Recuerda: Los porcentajes contrastan números contra el 100.

Multiplica el decimal, .375 por 100 para obtener su forma de porcentaje.

$$\begin{aligned} &.375 \\ &= .375 \times 100\% \\ &= 37.5\% \end{aligned}$$

Acabas de encontrar que el 3 es el 37.5% de 8.

Regla

Para encontrar que porcentaje representa un número para otro:

1. Convierte la cuestión a una fracción de la forma "es sobre de", o $\frac{\text{"}es\text{"}}{\text{"}de\text{"}}$.
2. Convierte la fracción a decimales utilizando la división.
3. Convierte el decimal en porcentaje. Multiplica el decimal por 100, y escribe un signo % al final del número.

Ejemplo: Al porcentaje más cercano, ¿qué porcentaje de 11 es 3?

Solución

Paso1: $\frac{\text{"}es\text{"}}{\text{"}de\text{"}}$

Aquí, 3 "es" algún porcentaje "de" 11. Así la fracción será $\frac{\text{"}es\text{"}}{\text{"}de\text{"}} = \frac{3}{11}$.

Paso 2: Convierte a decimales.

$$= 11\overline{)3.000}\quad .272$$

$$\begin{array}{r} -2.2 \\ \hline 80 \\ -\ 77 \\ \hline 30 \\ -\ 22 \\ \hline \end{array}$$

$$= .\overline{27}$$

Paso 3: Convierte a porcentaje

$$.\overline{27} \times 100\% = 27.\overline{27}\%$$

Paso 4: Redondea al porcentaje más cercano

$$27.\overline{27}\% \approx 27\%$$

Ejemplo: Convierte 38% a decimales.

Solución: Repasando el significado de porcentaje,

$$38\% = 38 \times \frac{1}{100}$$

$$= \frac{38}{100}$$

$$= .38$$

¡Simplemente moviste el punto decimal dos lugares a la izquierda!

Regla

Para convertir de decimales a porcentaje: **1.** Mueve el punto decimal 2 lugares a la derecha **2.** Coloca un signo de % al final.	0.43 4 3. 43%
Para convertir de porcentaje a decimales: **1.** Quita el signo de %. **2.** Mueve el punto decimal 2 lugares a la izquierda.	17% .1 7 0.17

¡Inténtalo!

4. ¿Qué porcentaje de 5 es 4?

5. ¿Cuál es el 14% de 2,350?

6. Convierte los porcentajes a decimales.

a. 10% **b.** 25% **c.** 19%

d. 61% **e.** 72.1% **f.** 129%

7. Convierte cada decimal a un porcentaje.

a. 0.14 **b.** 0.10 **c.** 0.78

d. 0.01 **e.** 1.02 **f.** 0.75

g. 0.003 **h.** 2.45

8. Encuentra:

a. 10% de 30

b. 15% de 75

c. 50% de 47

d. 25% de 20

9. Convierte las siguientes fracciones a porcentajes. Redondea a la centésima más cercana, si es necesario.

a. $\frac{3}{11}$

b. $\frac{1}{4}$

c. $1\frac{1}{5}$

d. $\frac{7}{8}$

e. $\frac{2}{12}$

f. $\frac{9}{10}$

10. Resuelve los siguientes problemas razonados de porcentajes.

d. ¿Qué porcentaje es el 5 de 80?

e. ¿Qué porcentaje es el 20 de 22?

Fin de la Unidad 2

Nombre___________________________

Fecha______________________________

Examen de la Unidad 2:
Repaso de Matemáticas Elementales

Utilice las hojas en blanco para resolver los problemas y hacer los cálculos, como sea necesario. Escriba los siguientes números en palabras.

[4 puntos cada una; 24 puntos en total]

1. 560,342 ____

____

2. 93’755,678 ____

____

3. $\frac{12}{18}$ ____

4. $5\frac{3}{5}$ ____

5. 2.325 ____

____

6. 47.5 ____

Escoja < o > o = para hacer cierta cada afirmación.

[2 puntos cada una; 18 puntos en total]

7. –45 ___ 40

8. $|-3|$ ___ 2

9. $|76|$ ___ $|-76|$

10. 0.813 ___ 0.81294565

11. –7 ___ –12

12. $\frac{3}{13}$ ___ $\frac{6}{13}$

13. $\frac{7}{8}$ ___ $\frac{7}{10}$

14. $\frac{3}{4}$ ___ $\frac{12}{16}$

15. 1.002 ___ 0.999

Resuelva los siguientes problemas. Escriba cada solución en el espacio en blanco.

[2 puntos cada uno; 30 puntos en total]

16. –3 + 5 = _____

17. –5 – (–7) = _____

18. 14 x 5 = _____

19. 267 + 135 = _____

20. 162 – 34 = _____

21. 17 x 12 = _____

22. 45 ÷ 9 = _____

23. $5\overline{)237}$ = _____

24. –6 x 3 = _____

25. –3 x –5 _____

26. 25% de 44 = _____

27. ¿Qué porcentaje es 9 de 18? _____

28. $\frac{3}{5}$ = _____%

29. 7% de $5.82 = $ _____

30. $\frac{10}{3}$ = _____

Factorice los siguientes números. Escriba cada número como el producto de factores primos. Incluya los cálculos. **[4 puntos cada una; 8 puntos en total]**

31. 28

32. 45

Encuentre el FCMG (Factor Común Más Grande)

[5 puntos cada una; 10 puntos en total]

33. 30 y 60

34. 72 y 81

Encuentre el MMC (Múltiplo Menos Común) de

[5 puntos cada una; 10 puntos en total]

35. 8 y 24

36. 25 y 100

Fin del Examen de la Unidad 2 – Repaso de Matemáticas Elementales